

Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3

La proportionnalité : progressivité des apprentissages (document éducol)

La proportionnalité est une notion autour de laquelle peuvent être pensés et organisés de nombreux apprentissages mathématiques. Sa maîtrise est indispensable tant pour un usage dans vie courante que dans un cadre professionnel. Son apprentissage s'inscrit dans la durée.

Cycle 2

Dès le cycle 2, l'élève rencontre des situations de proportionnalité dans le cadre de la résolution de problèmes multiplicatifs.

Exemple : un manuel de mathématiques pèse 340 g. Combien pèsent 5 manuels identiques ?

Ces problèmes préparent les élèves à la reconnaissance de situation de proportionnalité et à leur résolution par une procédure utilisant la propriété de linéarité pour la multiplication par un nombre.

Cycle 3

La notion de proportionnalité est introduite en première année du cycle 3. Le travail mené s'appuie particulièrement sur les problèmes multiplicatifs traités au cycle 2. Ce travail sur la proportionnalité se poursuit donc au cycle 3, et dans chacun des trois domaines « Nombres et calculs », « Grandeurs et mesures », Espace et géométrie ».

Cycle 4

Les procédures rencontrées au C3 pour résoudre des problèmes de proportionnalité continueront d'être utilisées au C4 (introduction en fin de cycle des fonctions linéaires).

Proposition de 8 exercices

Ce document a pour objectif d'identifier les différentes procédures pouvant être mises en œuvre par un élève de cycle 3 pour résoudre des problèmes de proportionnalité.

Dans la perspective de la mise en œuvre de séances sur la proportionnalité, il convient d'interroger les énoncés en se demandant quelles procédures ils privilégient.

L'objectif n'est pas de mettre en avant telle ou telle procédure particulière, mais de permettre à l'élève de disposer d'un répertoire de procédures, s'appuyant toujours sur le sens, parmi lesquelles il pourra choisir. La comparaison de différentes procédures doit permettre aux élèves d'acquérir ces différentes procédures et de prendre conscience qu'en fonction des nombres en jeu dans un problème, certaines sont plus efficaces que d'autres.

⇒ Grille de lecture

Rappel (Extrait des documents éducol, Stratégie d'enseignement) :

Les relations entre les nombres mis en jeu constituent une variable didactique avec laquelle l'enseignant peut jouer. En effet, **les rapports entre les nombres en jeu et la connaissance des tables de multiplication dans les deux sens (composition-décomposition)** par les élèves vont influencer le choix de la procédure à privilégier.

Détermination des rapports interne et externe

Rapport interne : rapport existant entre les nombres, les mesures d'une même grandeur dans la même unité.

Rapport externe : rapport existant dans un couple de données se correspondant. C'est le coefficient de proportionnalité

Lorsque le rapport interne entre les nombres est simple, on préférera l'utilisation des propriétés de linéarité.

Lorsque le rapport externe est simple, on aura tendance à avoir recours à une procédure basée sur le coefficient de proportionnalité

⇒ Exercices

Exercice 1

Dans le livre de recettes de cuisine de Corentin, on donne la recette pour faire 15 crêpes ou 25 crêpes :

Pour 15 crêpes

300 g de farine
3 œufs
75 cL de lait
3 cuillères à soupe d'huile

Pour 25 crêpes

500 g de farine
5 œufs
125 cL de lait
5 cuillères à soupe d'huile

Mais Corentin veut faire 10 crêpes seulement.

Donne la quantité d'ingrédients nécessaires pour faire 10 crêpes.

➤ Procédures possibles

- Utilisation de la propriété additive de la linéarité (dès le CM1)
 $25 - 15 = 10$
Donc on soustrait les quantités d'ingrédients nécessaires pour 15 personnes des quantités pour 25 personnes. Cette procédure est encouragée par l'énoncé.
- Diviser par 3, multiplier par 2 : on recherche les proportions pour 5 personnes (3 fois moins que pour 15 personnes) puis on les multiplie par 2 pour avoir les proportions pour 10 personnes. On a recours à la linéarité multiplicative.

Exercice 2

Madame Lucas veut préparer 60 crêpes pour la fête d'anniversaire de sa fille. Elle a emprunté le livre de recettes de Corentin.

Quelles sont les quantités d'ingrédients nécessaires pour faire 60 crêpes ?

➤ Procédures possibles

- Utilisation de la propriété multiplicative de la linéarité
La réponse est donnée pour 10 crêpes, donc pour 60 crêpes, il s'agit de multiplier par 6.
- ou de la propriété additive de linéarité : 60 crêpes c'est 10 crêpes + 10 crêpes + 10 crêpes + ...
(Début CM1)

Exercice 3

Gabin et Jade s'ennuient à l'arrière de la voiture de leurs parents. Pour s'occuper, en attendant à un feu rouge, ils comptent le nombre de fois où s'allume le clignotant de la voiture devant eux.

Gabin a compté qu'il s'allumait 35 fois en 25 secondes.

Jade a compté qu'il s'allumait 49 fois en 35 secondes.

Combien de fois va s'allumer ce clignotant en une minute ?

Et en 10 secondes ?

➤ Procédures possibles

- Utilisation de la propriété additive de la linéarité (somme, dès le CM1)
Une minute, c'est 35 secondes plus 25 secondes. Donc il s'agit d'ajouter 49 et 35, pour trouver le nombre de fois où s'allume le clignotant en une minute
- De même, pour la seconde question, utilisation de la propriété additive de la linéarité (différence, dès le CM1)
10 secondes, c'est 35 secondes moins 25 secondes.

Exercice 4

Une entreprise fabrique des vis. Avant de les mettre dans une boîte une machine vérifie qu'il y a le bon nombre de vis en les pesant. Pour un paquet de 80 vis la machine a été réglée pour vérifier que la masse est bien 280 g.

Une autre machine fait des paquets des mêmes vis, mais de 30 vis seulement.

Quelle masse faut-il régler sur cette autre machine pour s'assurer qu'il y ait bien 30 vis ?

➤ Procédures possibles

- Utilisation de la propriété multiplicative de la linéarité (fin CM1)
80 vis ont une masse de 280 g. Il est assez difficile de passer de 80 à 30.
Mais on peut reconnaître des relations entre les nombres : on reconnaît que 80 et 280 sont tous deux multiples

de 8.

80 vis ont une masse de 280 g, donc 10 vis ont une masse de 35 g. On introduit ici un troisième couple de données.

10 vis ont une masse de 35 g, donc 30 vis ont une masse de 105 g.

- Passage à l'unité (fin CM2)
Une vis a une masse de 3,5 g ($280 : 80$)

Exercice 5

L'usine produit également des boulons. Ceux-ci sont vendus dans des boîtes de 100. La machine qui vérifie les masses avant la mise en boîte est réglée sur 836 g.

Une autre machine fait des boîtes des mêmes boulons, mais de 25 boulons seulement.

Quelle masse faut-il régler sur cette autre machine pour s'assurer qu'il y ait bien 25 boulons ?

➤ **Procédures possibles**

- Utilisation de la propriété multiplicative de la linéarité (diviseur, début CM2)

En effet, le rapport interne (entre 100 et 25) est assez simple. La masse de 25 boulons est le quart de la masse des 100 boulons.

Exercice 6

Cette usine produit également des boulons d'une plus grande taille. Ceux-ci sont vendus dans des boîtes de 10. La machine qui vérifie les masses avant la mise en boîte est réglée sur 178 g.

Une autre machine fait des boîtes des mêmes boulons, mais de 3 boulons seulement.

Quelle masse faut-il régler sur cette autre machine pour s'assurer qu'il y ait bien 3 boulons ?

Remarque : On joue ici sur la nature des nombres puisque le rapport entre 10 et 3 est un nombre décimal (0,3), ce qui rend difficile le passage de 10 à 3.

➤ **Procédures possibles**

- Utilisation du passage à l'unité (fin CM2)

178 g pour 10 boulons, soit 1,78g pour 1 boulon et $1,78 \times 3$ g pour 3 boulons

- Utilisation du rapport de linéarité interne (fin CM2)

3 boulons correspondent à $10 \times 0,3$ boulons.

Donc la masse est de $178 \times 0,3$ g pour 3 boulons.

Exercice 7

Une usine fonctionne tous les jours (7 jours sur 7) et toute la journée chaque jour (24 heures sur 24). Elle produit des robots ménagers de façon continue. L'usine produit 80 robots par jour.

Combien l'usine produit-elle de robots par semaine ?

Recopier la phrase suivante en la complétant :

« On peut dire qu'il sort un robot de cette usine toutes les minutes. »

Remarque : L'exercice permet de travailler la grandeur temps

➤ **Procédures possibles**

- Utilisation de la propriété multiplicative de la linéarité

Une semaine c'est 7 fois plus qu'un jour, donc on produit 7 fois plus de robots. Il illustre bien la définition de la proportionnalité.

Seconde question : 1 robot, c'est 80 fois moins que 80 robots, donc nécessité d'un temps 80 fois plus court qu'une journée, soit $1j / 80$.

Or, $1j : 24 \times 60 \text{ min} = 1440 \text{ min}$ et $1440 \text{ min} / 80 = 18 \text{ min}$

On peut dire qu'il sort un robot de cette usine toutes les 18 minutes.

Début de CM2

Remarque :

1 jour	80 robots
7 jours (1 semaine)	?

Cette question relève d'un problème multiplicatif

1 440 min (1 jour)	80 robots
?	1 robot

Cette question relève d'un problème de division (partition)

Exercice 8

Plusieurs enfant jouent avec des Kapla, c'est un jeu de construction à base de planchettes en bois toutes identiques. Alex a empilé 50 planchettes et a ainsi obtenu une tour de 39 cm de hauteur.

Emma a empilé 100 planchettes.

Léo a empilé 5 planchettes.

Zoé a empilé 17 planchettes.

Quelle est la hauteur des tours construites par chaque enfant ?

➤ Procédures possibles

Pour Emma : 100 planchettes c'est le double de 50 planchettes donc la hauteur de la tour d'Emma est le double de 39 cm soit 78 cm. (début de CM1)

Pour Léo : 5 c'est le dixième de 50 planchettes donc la hauteur de la tour de Léo sera le dixième de 39 cm soit 3,9 cm.

Remarque : Dans les deux cas précédents, on a recours à la linéarité multiplicative : le rapport interne est respectivement 2 et $\frac{1}{10}$ (ou 0,1).

Pour Zoé : On a recours au coefficient de proportionnalité. On peut raisonner avec la règle de trois : 50 planchettes correspondent à une hauteur de 39 cm

1 planchette c'est 50 fois moins donc correspond à une hauteur de $\frac{39}{50}$ cm

Et 17 planchettes c'est 17 fois plus donc correspondent à une hauteur de $\frac{39 \times 17}{50}$ cm soit de $\frac{663}{50}$ cm soit 13,26 cm.

(Fin de CM2, début 6^e)