ENSEIGNER LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES AU CYCLE 3 : PARTIE 1

Circonscription du Haut Grésivaudan

PLAN DE FORMATION

- Enseigner la résolution de problèmes : attendus et compétences mobilisées
- Représenter et modéliser
- Le processus d'abstraction
- La construction du schéma en barres
- Le cas particulier du schéma gain-perte
- Les intérêts du schéma en barres

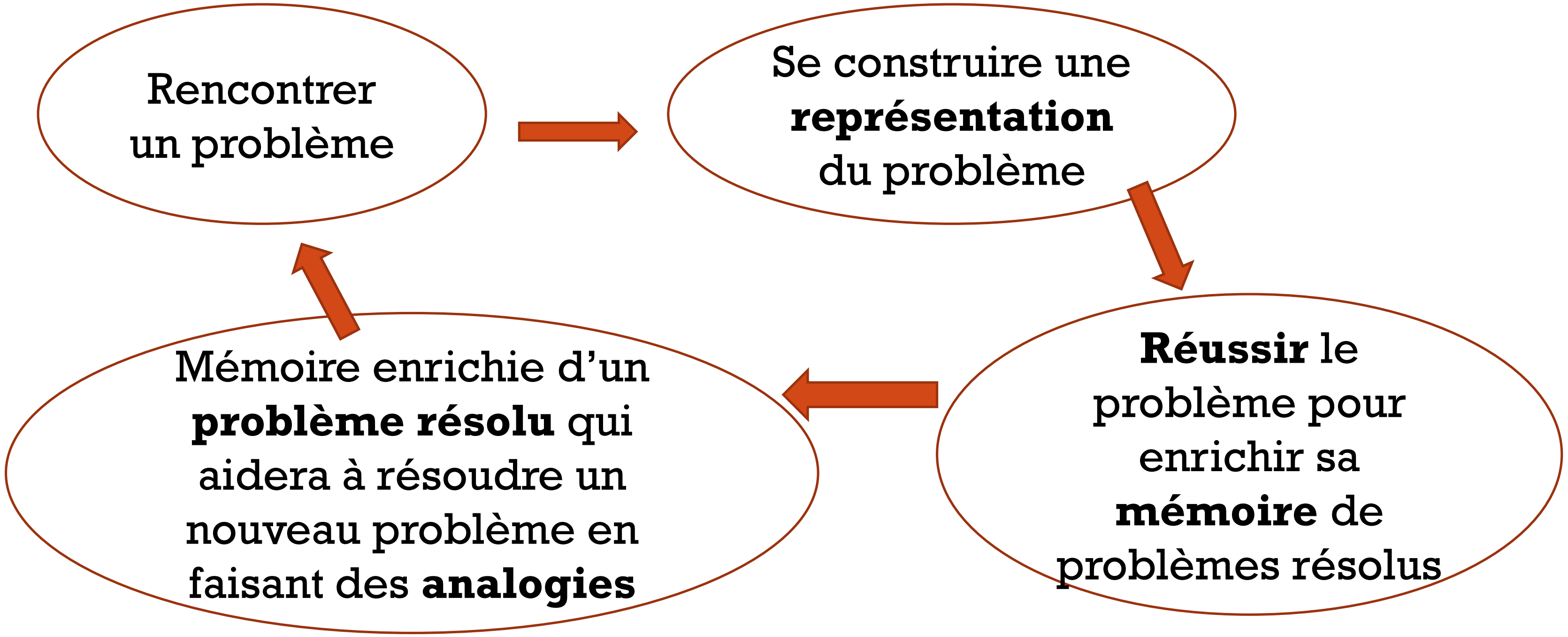
PLAN DE FORMATION

- Enseigner la résolution de problèmes : attendus et compétences mobilisées
- Représenter et modéliser
- Le processus d'abstraction
- La construction du schéma en barres
- Le cas particulier du schéma gain-perte
- Les intérêts du schéma en barres

RÉSOUDRE UN PROBLÈME, QU'EST-CE QUE C'EST?

Résoudre un problème ce n'est pas que…	Résoudre un problème c'est aussi et surtout…
→écrire la phrase réponse, →donner une solution, →raconter une histoire, …etc	→comprendre et se représenter ce qu'on connait et ce qu'on cherche, →expliquer comment on a fait pour trouver la réponse …etc

COMMENT RÉUSSIT-ON À RÉSOUDRE DES PROBLÈMES ?
UN ENSEIGNEMENT EXPLICITE



D'après Julo 1995

LES COMPÉTENCES TRAVAILLÉES

	Cycle 2	Cycle 3
Chercher	S'engager dans une démarche de résolution de problèmes en observant, en posant des questions, en manipulant, en expérimentant, en émettant des hypothèses, si besoin avec l'accompagnement du professeur après un temps de recherche autonome. -Tester, essayer plusieurs pistes (les siennes, celles des pairs, de l'enseignant)	- Prélever et organiser les informations nécessaires à la résolution des problèmes à partir de supports variés : textes, tableaux, graphiques, dessins, schémas… -S'engager dans une démarche, observer, questionner, manipuler, expérimenter, émettre des hypothèses en mobilisant des outils ou des procédures mathématiques déjà rencontrées, en élaborant un raisonnement adapté à une situation nouvelle ; -Tester, essayer plusieurs pistes de résolution
Modéliser	- Utiliser des outils mathématiques pour résoudre des problèmes concrets, notamment des problèmes portant sur les grandeurs et leurs mesures. -Réaliser que certains problèmes relèvent de situations additives, d'autres de situations multiplicatives, de partages ou de groupements	-Utiliser les mathématiques pour résoudre quelques problèmes issus de la vie quotidienne -Reconnaitre et distinguer des problèmes relevant des situations additives, multiplicatives, de proportionnalité

	Cycle 2	Cycle 3
Représenter	-Appréhender différents systèmes de représentations (dessins, schémas, arbres de calculs, etc.) -Utiliser des nombres pour représenter des quantités ou des grandeurs.	- Utiliser des outils pour représenter un problème : dessins, schémas, diagrammes, graphiques, écritures avec parenthésages, etc… -Produire et utiliser diverses représentations des fractions simples et des nombres décimaux
Raisonner	-Anticiper le résultat d'une manipulation, d'un calcul -Tenir compte d'éléments divers (arguments d'autrui, résultats d'une expérience, etc.) pour modifier son jugement. -Prendre progressivement conscience de la nécessité et de l'intérêt de justifier ce que l'on affirme.	-Résoudre des problèmes nécessitant ,l'organisation de données multiples ou la construction d'une démarche qui combine des étapes de raisonnement

SYNTHÈSE DES ATTENDUS ET DES REPÈRES ANNUELS DE PROGRESSION

	Type de problèmes	Modélisation	Contexte numérique	Prise d'information
CP	Additifs-soustractifs : 1 et 2 étapes Sens des signes +, - Multiplicatifs : construction du sens Division : construction du sens	-Schémas ou écritures mathématiques -Itération addition (possible)	Champ numérique : 100	Problèmes à 1 ou 2 étapes impliquant des longueurs, durées ou des prix
CE1	Additifs/soustractifs :1 et 2 étapes Multiplication (signe x) Division (valeur d'une part/nb de parts)	-Schéma ou écritures mathématiques -Itération addition	Champ numérique : 1000	idem : masses, contenances
CE2	Additifs/soustractifs/multiplicatifs Partages et groupements (signes +, -, x, :)	-Schémas ou écritures mathématiques	Champ numérique : 10 000	Tableau, graphique idem
CM1	Sens des 4 opérations, problème à 1 ou plusieurs étapes Proportionnalité : propriétés de linéarité additive et multiplicative	Communication de la démarche : langage naturel, schémas, opérations	Champ numérique : million Fractions et décimaux (« nombres simples »)	Texte, tableau, représentations graphiques Domaines : nombres et calculs, grandeurs et mesures, géométrie
CM2	4 opérations Proportionnalité : linéarité, passage par l'unité, coefficient de proportionnalité pourcentage (introduction symbole)		Champ numérique : milliard, Nature des nombres : décimaux jusqu'à 3 décimales	
6e	Structures additives et multiplicatives : 1 ou plusieurs étapes de raisonnement. Proportionnalité : utilisation du coefficient proportionnalité, pourcentage		Nombres entiers et décimaux	Supports variés produit des tableaux à double entées , diagrammes, graphiques

	Cycle 2	Cycle 3
Calculer	-Calculer avec des nombres entiers, mentalement ou la main, de manière exacte ou approchée, en utilisant des stratégies adaptées aux nombres en jeu. -Contrôler la vraisemblance de ses résultats.	-Calculer avec des nombres décimaux et des fractions simples de manière exacte ou approchée, en utilisant des stratégies ou des techniques appropriées (mentalement, en ligne, ou en posant les opérations) -Contrôler la vraisemblance de ses résultats -Utiliser une calculatrice pour trouver ou vérifier un résultat
Communiquer	-Utiliser l'oral et l'écrit, le langage naturel puis quelques représentations et quelques symboles pour expliciter des démarches, argumenter des raisonnements.	-Utiliser progressivement un vocabulaire adéquat et/ou des notations adaptées pour décrire une situation, exposer une argumentation -Expliquer sa démarche ou son raisonnement, comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange

COMPÉTENCES MATHÉMATIQUES MOBILISÉES EN RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Construction d'un raisonnement organisé :

Je cherche (oralement en collectif, à l'aide de la reformulation ou mentalement) : quelles quantités sont en jeu, lesquelles sont connues, inconnues, la plus grande, etc..

Je représente (étape transitoire et optionnelle dans ce cadre précis) : à l'aide d'un dessin puis d'un schéma libre (dessin dans lequel ne figurent que les informations relatives aux quantités pertinentes), puis d'un schéma en barres qui constitue alors une modélisation)

Je modélise : à l'écrit à l'aide d'un schéma en barres, puis (ou) d'une opération.

Je calcule : on effectue l'opération, de manière libre (mentalement, en ligne, en colonne, par étapes, etc..)

Je communique : (plutôt à l'écrit) on transmet sa solution au problème. On garde la mémoire de cette résolution pour qu'elle puisse resservir dans d'autres contextes.

LES COMPÉTENCES : QUELQUES ÉLÉMENTS DE PROGRESSIVITÉ

Chercher

Expérimenter : des objets concrets proches de la réalité aux objets concrets « décontextualisés » (par exemple des cubes), puis aux objets mathématiques

Représenter

- Faire évoluer des représentations picturales peu traduisibles par des calculs : des dessins contextualisés, proches de la réalité du problème à des schémas (en barres)
- Faire évoluer le mode iconique pour accéder au mode symbolique

Raisonner

Anticiper le résultat d'une manipulation : de la manipulation passive à la manipulation active (mentale)

Communiquer

Faire évoluer les traces écrites pour qu'elles soient de vrais supports lors l'argumentation, qu'elles soient le reflet du raisonnement mis en œuvre

PLAN DE FORMATION

- Enseigner la résolution de problèmes, attendus et compétences mobilisées
- Représenter et modéliser
- Le processus d'abstraction
- La construction du schéma en barres
- Le cas particulier du schéma gain-perte
- Les intérêts du schéma en barres

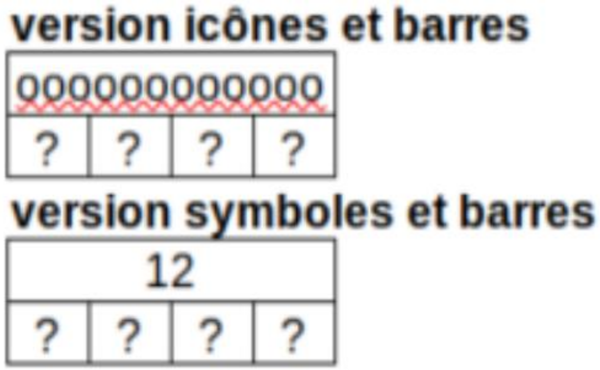
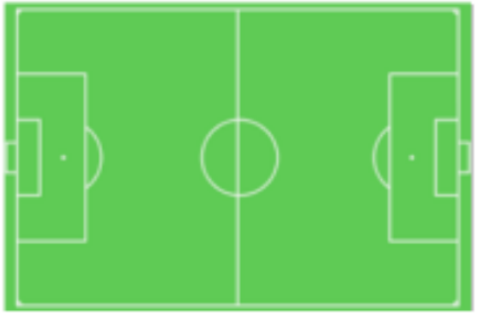
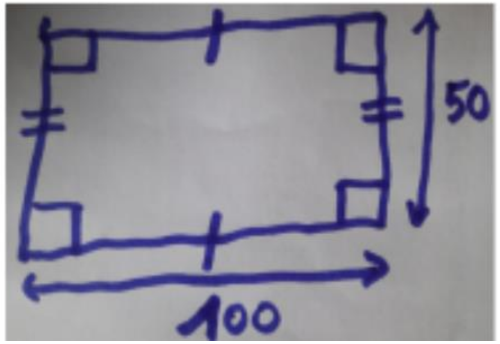
REPRÉSENTER ET MODÉLISER

Représenter c'est utiliser des outils pour représenter un problème : dessins, schémas, diagrammes, graphiques, écritures avec parenthésages, etc. ;

- produire et utiliser diverses représentations des fractions simples et des nombres décimaux ;
- analyser une figure plane sous différents aspects (surface, contour de celle-ci, lignes et points) ;
- reconnaître et utiliser des premiers éléments de codages d'une figure plane ou d'un solide ;
- utiliser et produire des représentations de solides et de situations spatiales.

Modéliser c'est :

- utiliser les mathématiques pour résoudre quelques problèmes issus de situations de la vie quotidienne;
- reconnaître et distinguer des problèmes relevant de situations additives, multiplicatives, de proportionnalité ;
- reconnaître des situations réelles pouvant être modélisées par des relations géométriques (alignement, parallélisme, perpendicularité, symétrie) ;
- utiliser des propriétés géométriques pour reconnaître des objets.

<table>
<tr><th></th><th>Représenter : rendre perceptible à la vue et à l'esprit.</th><th>Modéliser : représenter en utilisant des mathématiques</th></tr>
<tr><td>J'ai 12 billes et 4 boîtes. Chaque boîte doit contenir le même nombre de billes. Combien de billes dans chaque boîte?</td><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td>Ce terrain de football est un rectangle de 100 m de long et de 50m de large. Pour acheter des graines de gazon, je dois connaître son aire.</td><td></td><td>
</td></tr>
</table>

PLUSIEURS REGISTRES DE REPRÉSENTATION POSSIBLES :
LESQUELLES SONT DES MODÉLISATIONS MATHÉMATIQUES ?

<table>
<tr><th>Registre de la langue écrite</th><th>Registre iconique</th><th>Registre iconique</th></tr>
<tr>
<td>J’ai 12 billes et 4 boîtes.
Chaque boîte doit contenir le même nombre de billes.
Combien de billes dans chaque boîte ?</td>
<td>


Registre des schémas en barres
version icônes et barres
<table>
<tr><td colspan="5">?</td></tr>
<tr><td>oooooooooooo</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
version symboles et barres
<table>
<tr><td colspan="2">?</td></tr>
<tr><td>12</td><td>4</td></tr>
</table>

Registre pré-algébrique
? = 12+4= 16
Il y a 16 billes par boîtes.
</td>
<td>


Registre des schémas en barres
version icônes et barres
<table>
<tr><td colspan="4">oooooooooooo</td></tr>
<tr><td>?</td><td>?</td><td>?</td><td>?</td></tr>
</table>
version symboles et barres
<table>
<tr><td colspan="4">12</td></tr>
<tr><td>?</td><td>?</td><td>?</td><td>?</td></tr>
</table>

Registre pré-algébrique
12= 4x ? donc ? = 12 : 4
Il y a 3 billes par boîtes
</td>
</tr>
</table>

PLAN DE FORMATION

- Enseigner la résolution de problèmes, attendus et compétences mobilisées
- Représenter et modéliser
- Le processus d’abstraction
- La construction du schéma en barres
- Le cas particulier du schéma gain-perte
- Les intérêts du schéma en barres

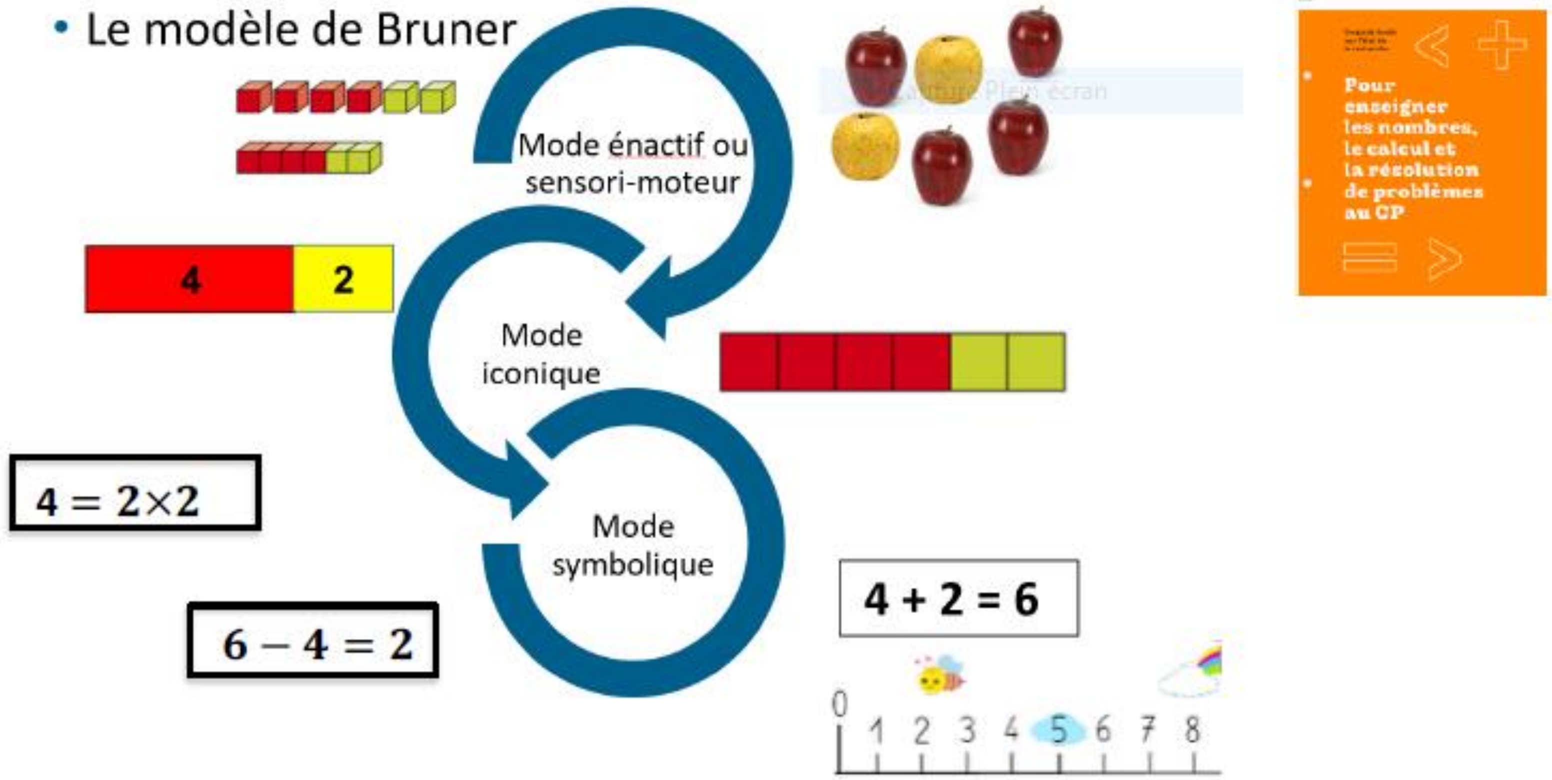
LE PROCESSUS D'ABSTRACTION

L'abstraction en mathématique c'est :

- **analyser les expériences vécues** pour identifier les similitudes et les différences;
- **donner une cohérence à la multitude de faits** rencontrés au cours l'expérience;
- **utiliser des symboles** qui expriment des relations de plus en plus complexes;
- **être capable de généraliser.**

Le processus d'abstraction

- Le modèle de Bruner



LE PROCESSUS DE MODÉLISATION : UN PROCESSUS EN 3 TEMPS

Problème extramathématique

Modéliser
(chercher,
raisonner,
représenter)

Problème mathématique

Valider
raisonner

Résoudre
raisonner,
calculer

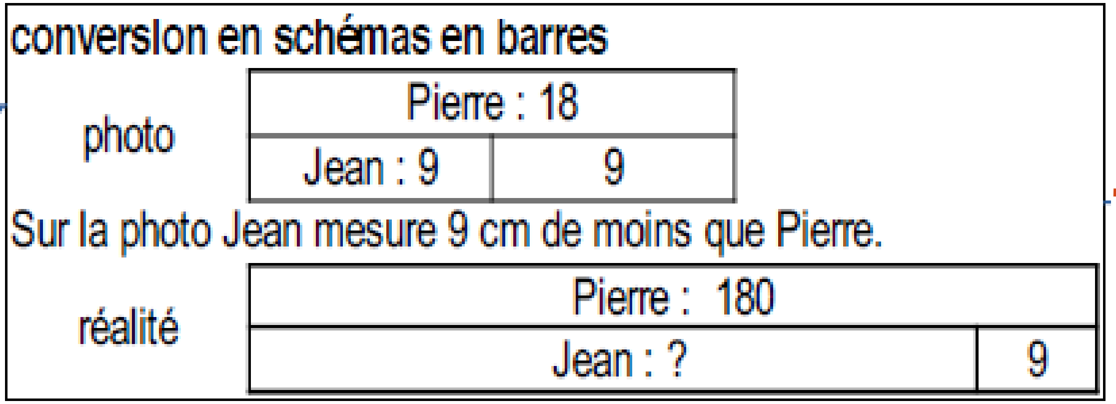
Solution mathématique

La mise au point d'un modèle à partir du réel, le fonctionnement du modèle lui-même à l'intérieur des mathématiques et la confrontation des résultats du modèle au réel. (document ressource "modéliser")

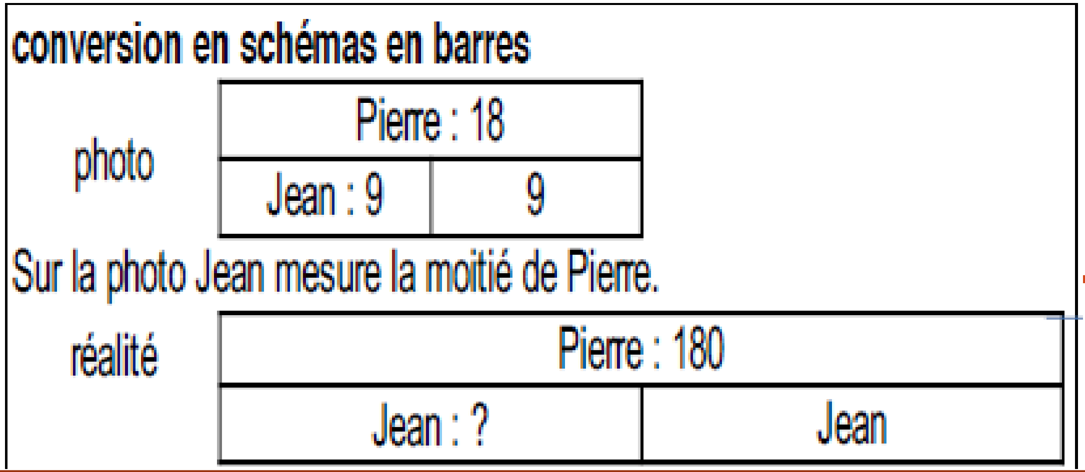
DEUX TYPES DE DIFFICULTÉS : CONVERSION ENTRE DEUX REGISTRES ET TRAITEMENT DANS UN REGISTRE

Enoncé écrit

Sur la photo Pierre mesure 18 cm et Jean 9 cm. En réalité Pierre mesure 180cm. Combien mesure Jean ?



Résoudre :
Jean + 9 = 180
Jean = 180-9 = 171
Jean mesure 171 cm.



Résoudre :
2 Jean = 180
Jean = 180 : 2 =90
Jean mesure 90 cm.

À partir de l'énoncé, la conversion en schéma en barres peut être correcte (ou partiellement correcte) et amener à une résolution erronée.

SENS DES OPÉRATIONS ET ABSTRACTION EN RDP

- L'appui sur la modélisation ne doit pas négliger la vérification de **la compréhension du problème.**

- Le processus de modélisation n'est pas un processus linéaire.

- La schématisation n'est utile que si elle est associée à une compréhension du problème et à une vérification de cette compréhension.

Registre des schémas en barres

version icônes et barres

?				
oooooooooooo				

version symboles et barres

?	
12	4

Registre pré-algébrique

? = 12+4= 16

Il y a 16 billes par boîtes.

SENS DES OPÉRATIONS ET ABSTRACTION : LIENS ENTRE MATÉRIEL ET MODÉLISATION

J'ai 12 billes et 4 boîtes . Chaque boîte doit contenir le même nombre de billes. Combien de billes y a-t-il dans chaque boîte ?

Registre des schémas en barres

version icônes et barres

?				
oooooooooooo				

version symboles et barres

?	
12	4

Registre pré-algébrique

? = 12+4= 16

Il y a 16 billes par boîtes.

Recours au matériel pour (re)donner du sens au schéma et à la modélisation

12			
?	?	?	?

12			
3	3	3	3

MODÉLISATION, SENS DES OPÉRATIONS ET ABSTRACTION

- Le schéma ne doit pas être un « tableau vide » à remplir mais doit avoir du sens.

- Avec l'habitude : l'élève se réfèrera explicitement à une banque de problème déjà vus et à une banque de schémas.

- Ce schéma constitue aussi une mémoire:

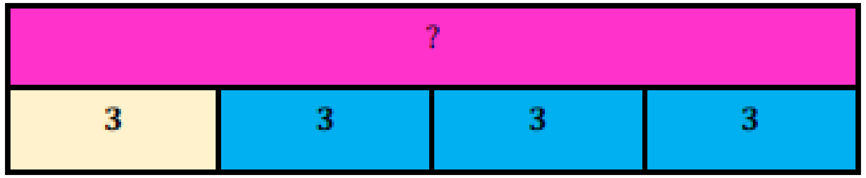
– mémoire du problème et des étapes de la modélisation (mise en relation mathématique des informations)

– mais aussi mémoire des étapes et procédures de la résolution

– un support concret et partagé pour la vérification du résultat et l'explicitation du raisonnement: support pour l'argumentation orale entre élève/professeur/élèves

LE SCHÉMA EN BARRE COMME INTERMÉDIAIRE ENTRE LES DIFFÉRENTES COMPOSANTES DE LA RDP

- Exemple : Je souhaite partager avec mon petit-frère les billes gagnées aujourd'hui. J'en garde 3 et j'en donne le triple à mon petit frère. Combien de billes avais-je gagné aujourd'hui ?

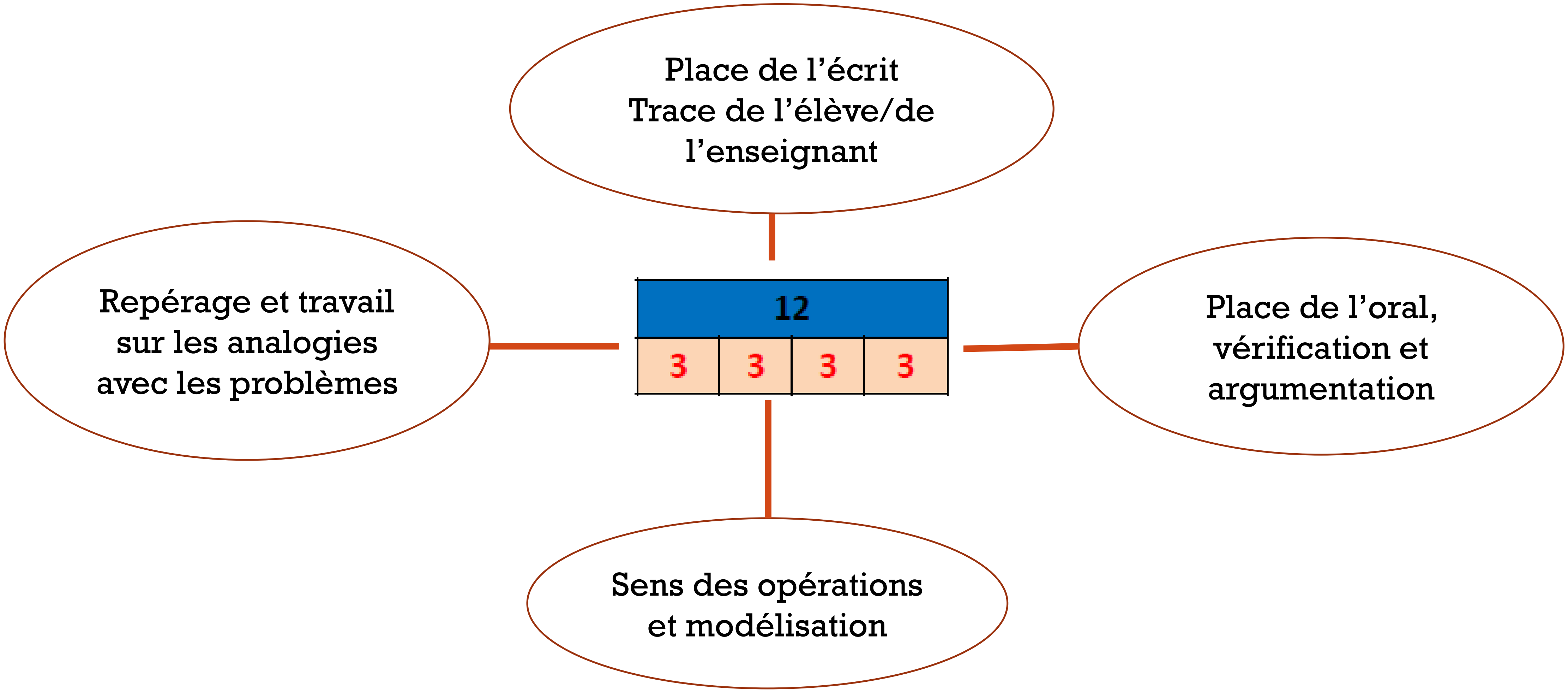


- Travail inter-registres sémiotiques : allers-retours oral/écrit/modélisation/calcul

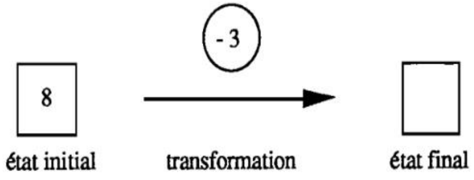
PLAN DE FORMATION

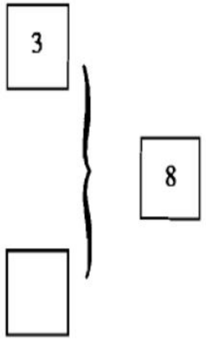
- Enseigner la résolution de problèmes, attendus et compétences mobilisées
- Représenter et modéliser
- Le processus d'abstraction
- La construction du schéma en barres
- Le cas particulier du schéma gain-perte
- Les intérêts du schéma en barres

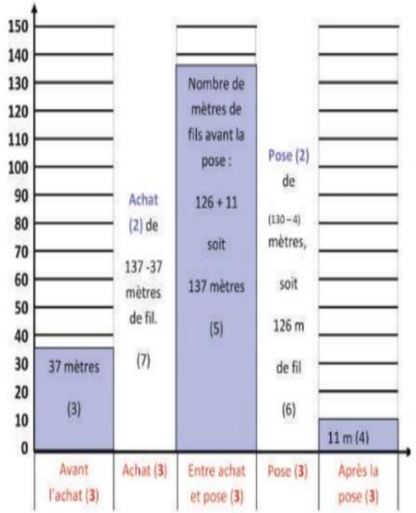
LE SCHÉMA EN BARRE COMME INTERMÉDIAIRE ENTRE LES DIFFÉRENTES COMPOSANTES DE LA RDP

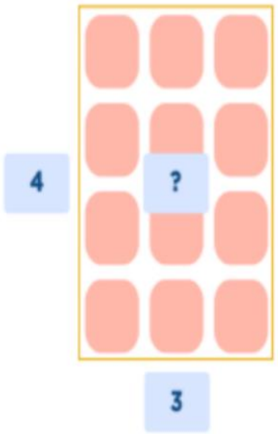


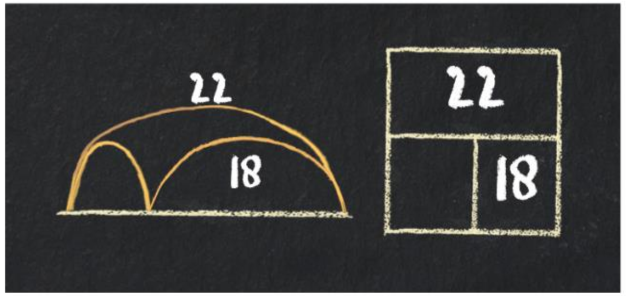
AUTRES REPRÉSENTATIONS

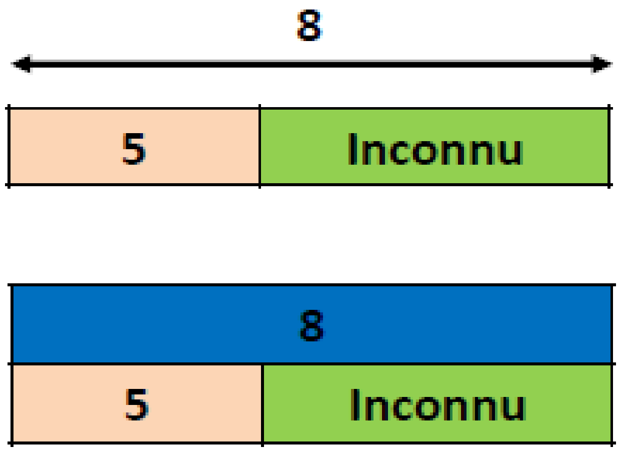










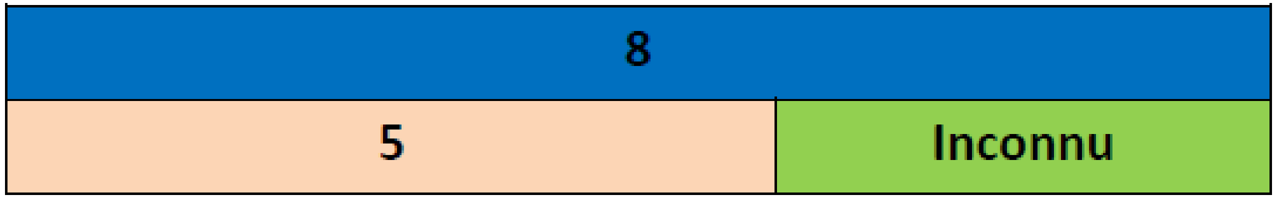


Transition possible:

Obtention du schéma à 2 barres par exemple en testant avec 3 réglettes la solution trouvée

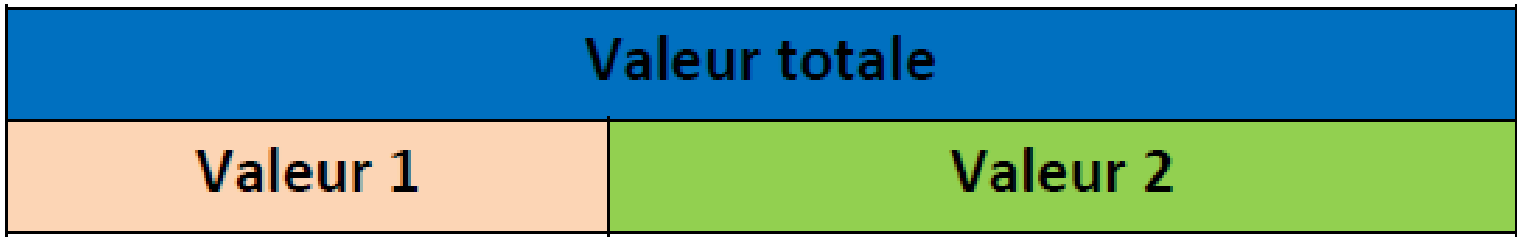
MODÉLISATION POUR CES QUATRE EXERCICES

- Exemple 1 : J'ai 8 billes. Je perds 5 billes. Combien ai-je de billes ?
- Exemple 2 : J'ai 8 billes en tout, des billes rouges et des billes bleues. Cinq billes sont rouges. Combien de billes sont bleues ?
- Exemple 3 : J'ai 8 billes, mon ami en a 5 de moins. Combien de billes a-t-il ?
- Exemple 4 : J'ai gagné 8 billes puis j'ai perdu 5 billes. Combien ai-je gagné de billes ?



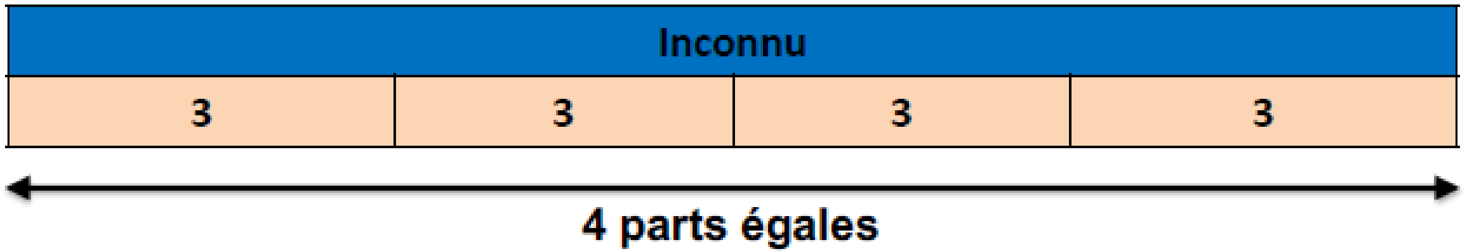
MODÈLE ADDITIF

- Rectangles remplis par les nombres (valeurs) connus, et, si le nombre (valeur) est inconnu par « inconnu », « ? » ou un mot (les aligner sur la marge).
- Longueur de la barre rectangle pas forcément proportionnelle au nombre qu'elle contient. Le plus petit nombre est représenté par une barre plus courte.
- Un seul modèle couvre tout le champ additif : recodage sémantique.



MODÉLISATION POUR CES EXERCICES

- Exemple 7 : J'ai 4 sacs de 3 billes, combien ai-je de billes ?
- Exemple 8 : Je souhaite partager avec mon petit-frère les billes gagnées aujourd'hui. J'en garde 3 et j'en donne le triple à mon petit frère. Combien de billes avais-je gagné aujourd'hui ?
- Exemple 9 : Je partage mes billes avec mon frère, j'en garde !" et j'en donne le reste. J'ai maintenant 3 billes. Combien en avais-je en tout?
- Exemple 10 : J'ai 3 billes, ma sœur autant et mon frère en a le double. Combien avons-nous de billes en tout?

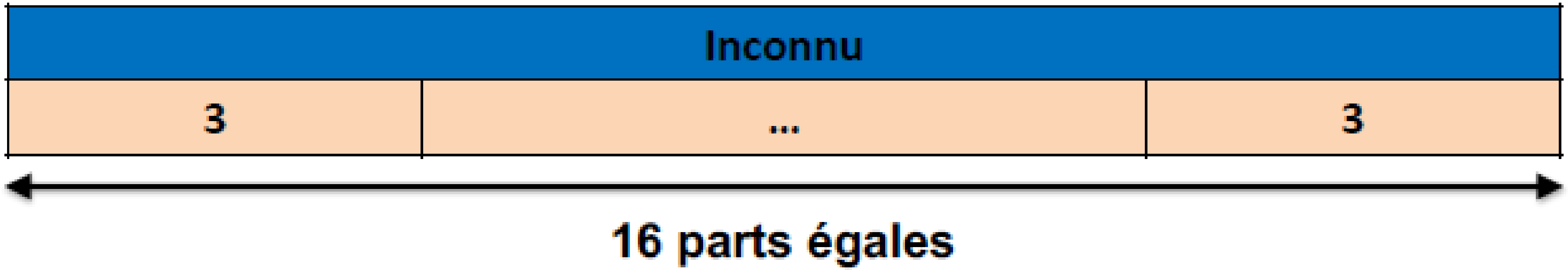


MODÉLISATION POUR CES EXERCICES

- Exemple 11 : J'ai 16 sacs de 3 billes. Combien en ai-je en tout?

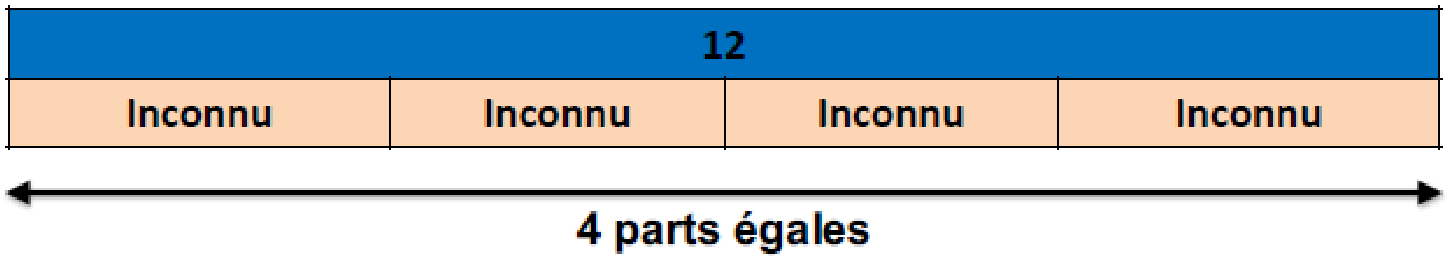
Autres exemples conduisant à ce modèle

- Apparition du symbole « … », très utilisé en mathématiques



MODÉLISATION POUR CES EXERCICES : VALEUR D'UNE PART

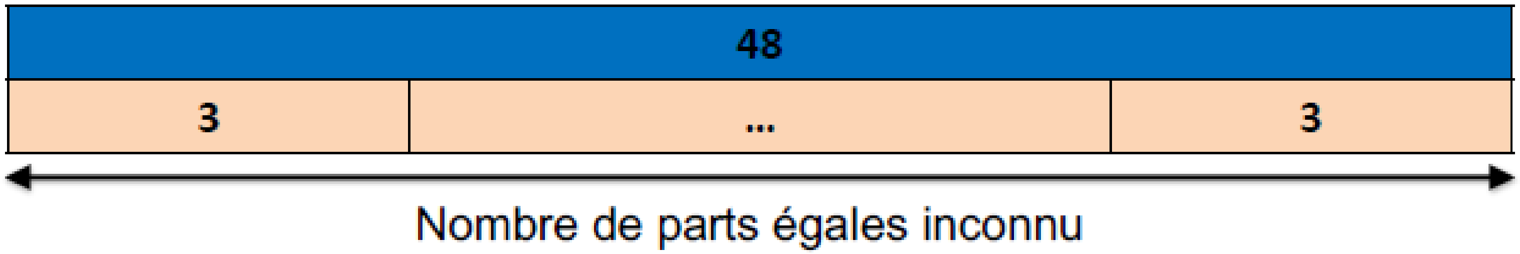
- Exemple 12 : J'ai 12 billes, je fais 4 sacs. Combien y-a-t-il de billes dans chaque sac ?
- Exemple 13 : J'ai 12 billes, j'en donne 1/4. Combien en reste-t-il?
- Autres problèmes : analogie du modèle



MODÉLISATION POUR LES GRANDS NOMBRES

- Exemple 15 : J'ai 48 billes, je fais de sacs de 3 billes, combien ai-je de sacs ?

- Symbole « … »



MODÈLE MULTIPLICATIF

- Rectangles remplis comme pour le modèle additif

- Parts égales : rectangles de même longueur ou codé

À main levée : coder les rectangles de même longueur (géométrie, segments de même longueur) pour les valeurs égales ou mettre le même mot ou la même lettre.

- Si le nombre de parts est connu :

  Tracer le nombre de parts égales ou ajouter la double-flèche.

- Si le nombre de parts est inconnu :

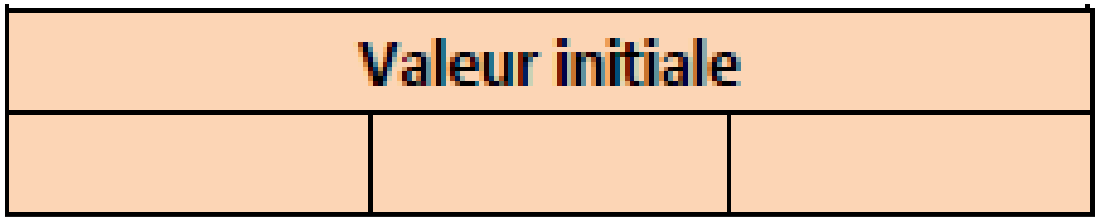
Écrire « nombre inconnu de parts égales » ou « ? de parts égales » sous la double-flèche.

Valeur totale		
Valeur d'une part	...	Valeur d'une part

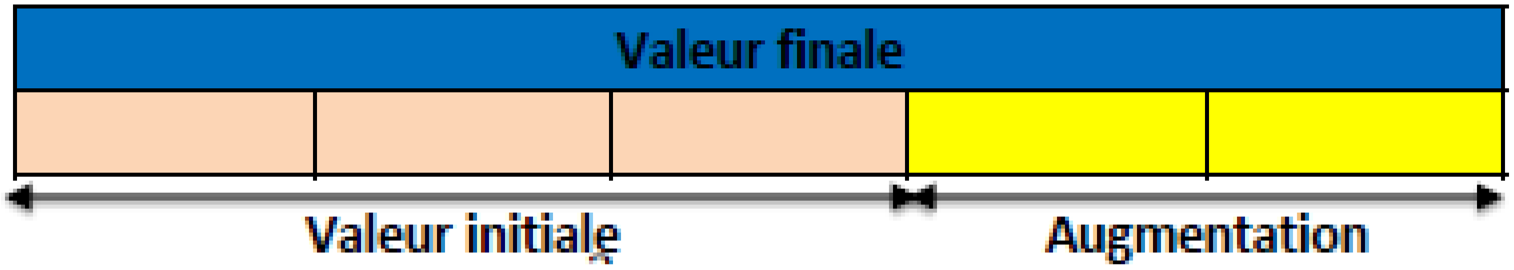
Nombre de parts égales

MODÈLE MULTIPLICATIF : FRACTIONS

- La valeur finale est la valeur initiale augmentée des 2/3 de la valeur initiale donc la valeur finale est égale aux 5/3 de la valeur initiale.



- On augmente la valeur initiale de 2/3.



- L’augmentation représente 2/5 de la valeur finale.

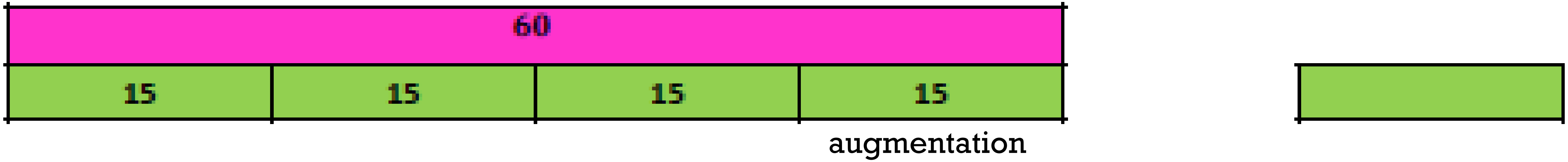
PROBLÈMES AVEC DES FRACTIONS SUPÉRIEURES À L'UNITÉ

- Je pense à un nombre, je l'augmente d'un tiers de sa valeur et j'obtiens 60.

À quel nombre avais-je pensé ?

- Modélisation

La valeur de référence (valeur initiale) est partagée en tiers



On l'augmente d'un tiers de sa valeur. Quatre tiers de cette valeur sont 60.

- Modèle calculable
- Le nombre de départ était trois quarts de 60 donc 45

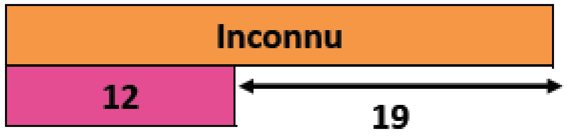
CAS DES PROBLÈMES DE COMPARAISON

- Loana a 12 billes. Pierre a 19 billes de plus que Loana.

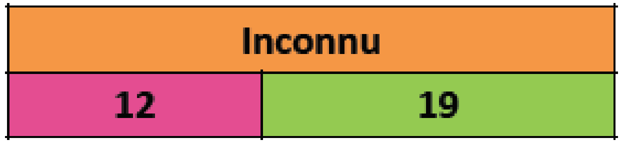
Combien de billes possède Pierre ?

- Schémas utilisés notamment dans le guide CP :

double-flèche pour la quantité qui n'existe pas



Vérification par la manipulation, analogie du modèle à deux barres avec le matériel :



Avantages :

- congruence avec la structure mathématique sous-jacente : 12 +19 = 31
  - congruence avec le modèle Partie-Tout qui traduit la même égalité
- objets de même nature représentés par des objets de même nature

FRACTIONS ET PROBLÈMES DE COMPARAISON

- Mes économies s'élèvent à 3 cinquièmes de celles de mon frère.

Mon frère a 24 € de plus que moi. Combien possède mon frère ?

mon frère	brique	brique	brique	12	12
moi	brique	brique	brique	24	

- Construction du modèle

La valeur de référence est partagée en 5

Mes économies en représentent trois cinquièmes

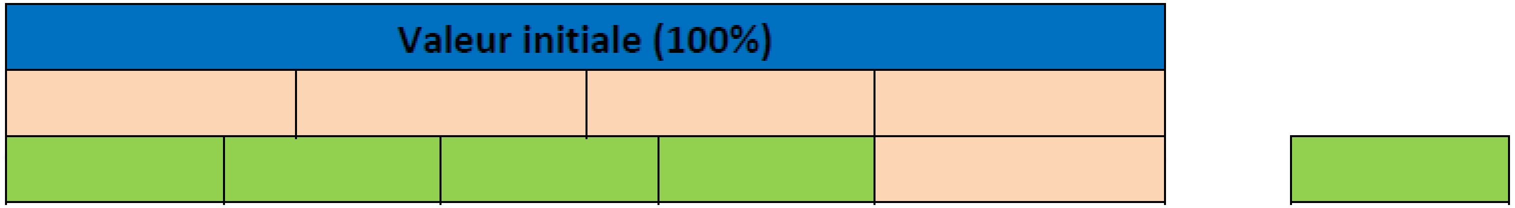
Mon frère a 24 € de plus que moi, deux cinquièmes de la valeur de référence.

- Modèle « calculable » et « calculatoire » : congruence avec la structure mathématique

- Equation du type « = + »

FRACTIONS ET POURCENTAGES

- La valeur initiale subit une baisse de 25% donc la valeur finale est égale aux 75 % de valeur initiale.



- Importance de la décomposition multiplicative

- La valeur finale représente $\frac{3}{4}$ de la valeur initiale.

- La diminution représente $\frac{1}{3}$ de la valeur finale.

- Diminuer de 25% puis augmenter de 25% ?

PROBLÈME COMPLEXE : FRACTIONS, POURCENTAGES ET COMPARAISON (ÉCART)

Autre formulation du problème précédent.

- Mes économies s'élèvent à 60% de celles de mon frère.

Mon frère a 24 € de plus que moi. Combien possède mon frère ?

- Mon frère et moi avions la même somme d'argent au départ. J'en ai dépensé 40% et j'ai maintenant 24 € de moins que lui.

PROBLÈMES COMPLEXES : PLUSIEURS ÉTAPES

Partie recherche :

- Problèmes complexes: étapes avec des ajouts éventuels de légendes, flèches.
- Respect des règles de construction des modèles
- Chaque valeur inconnue qui apparaît à plusieurs reprise est représentée par un rectangle de même longueur dans les différents schémas. Une autre valeur inconnue différente sera représentée pas un rectangle de longueur différente (autre codage).

PROBLÈMES COMPLEXES : PLUSIEURS ÉTAPES

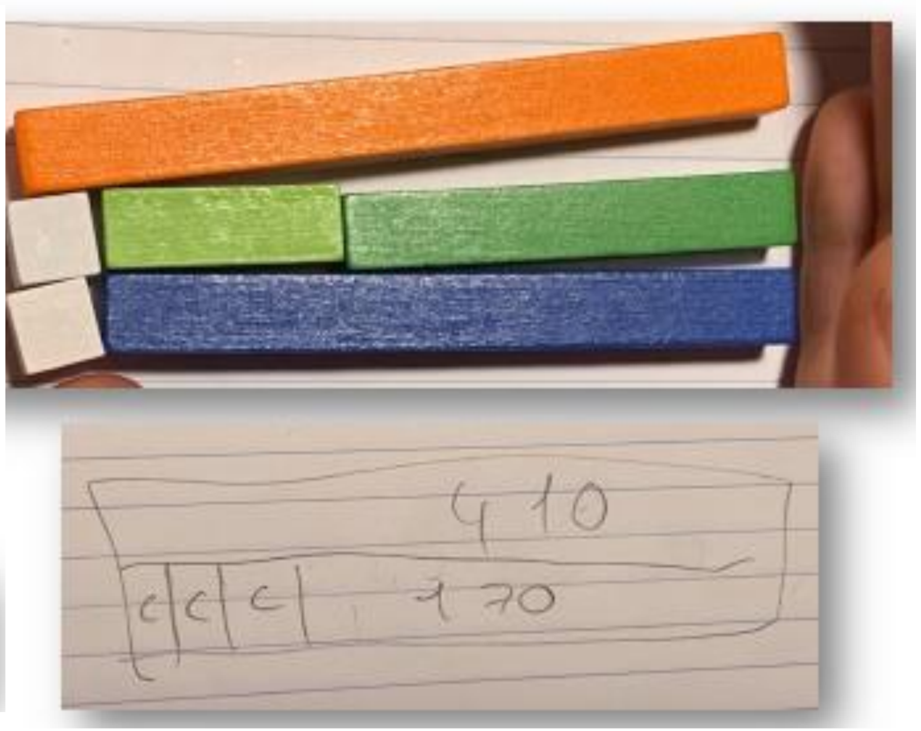
Exemple de problème complexe (Swee Ng, Lee, 2009) :

Une jeune vache pèse 150 kg de plus qu'un chien. Une chèvre pèse 130 kg de moins qu'une vache. Ensemble, les animaux pèsent 410 kg. Combien pèse le chien ?

- Résolution algébrique : plusieurs inconnues
- Etapes intermédiaires

PROBLÈMES COMPLEXES : RECHERCHE DU MODÈLE

- Une jeune vache pèse 150 kg de plus qu'un chien. Une chèvre pèse 130 kg de moins qu'une vache. Ensemble, les animaux pèsent 410 kg. Combien pèse le chien ?



Travail effectué par un élève de sixième, première quinzaine de septembre.

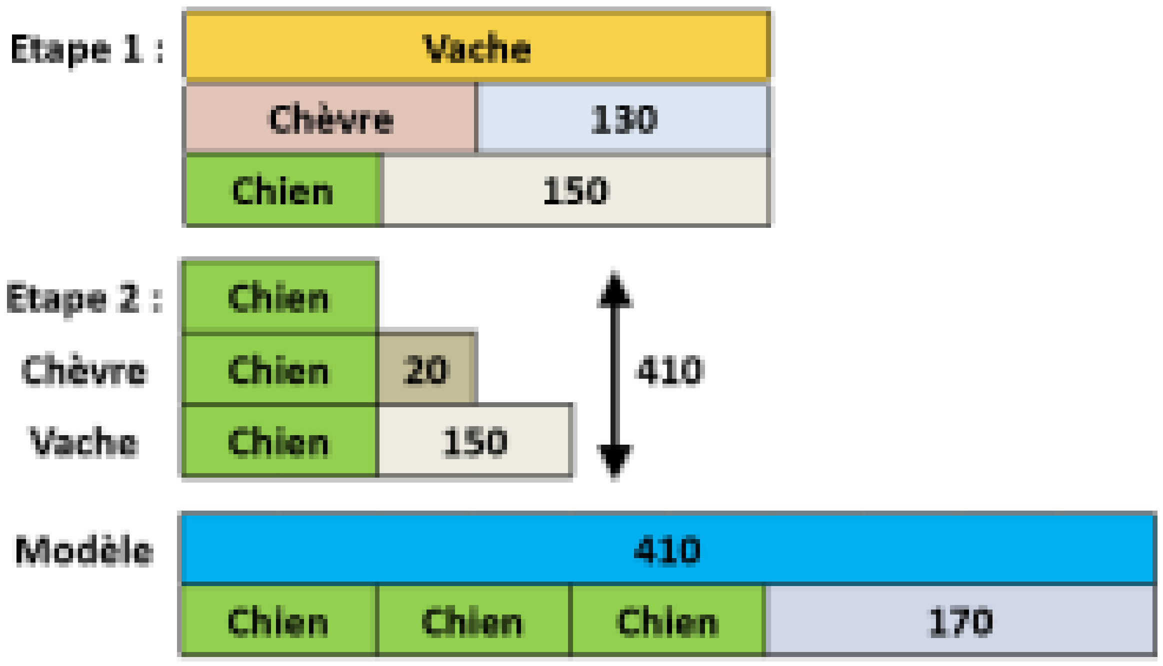
PROBLÈMES COMPLEXES : PRÉ-ALGÈBRE

-Synthèse : analyse, recherche de la brique unité

-On prend le chien comme « brique unité ».

-On en déduit le modèle

-Pré-algèbre : équation du type « + = »



PLAN DE FORMATION

- Enseigner la résolution de problèmes, attendus et compétences mobilisées
- Représenter et modéliser
- Le processus d'abstraction
- La construction du schéma en barres
- Le cas particulier du schéma gain-perte
- Les intérêts du schéma en barres

LE SCHÉMA GAIN-PERTE

- Problèmes de transformation au sens de Vergnaud

- Terme « Gain/Perte » générique pour désigner les problèmes:

Impliquant des gains et/ou des pertes (billes, euros, etc.)

Mobilisant des termes connexes: monter/descendre, avancer/reculer, ajout/retrait, recevoir/donner

- Proposition d'indications de progressivité relatives au niveau de difficulté mais pas ciblée dans les cycles

- Présentation non exhaustive

- Ne lève pas tous les problèmes

DIFFICULTÉS DES PROBLÈMES DE «GAIN/PERTE »

- Difficultés conceptuelles pour les élèves
  - Travailler sur des énoncés simples et éviter les difficultés langagières dans les énoncés
  - Eviter de mettre les élèves en difficulté, notamment technique
  - Vérifier la maîtrise des problèmes avant d'en aborder de nouveaux
- Une progressivité à respecter dans la présentation de ces exercices
  - Gradation des difficultés de conceptualisation
  - Explicitation des liens et analogies entre les différents problèmes
- Importance de la reformulation et liens avec les modèles additifs
  - Favoriser le réinvestissement des travaux antérieurs pour segmenter les difficultés

PROCESSUS DE MODÉLISATION EN DEUX ÉTAPES

1. Constitution d'un premier schéma à partir de l'énoncé
2. Analogie avec un modèle additif connu

- Ensuite phase de calcul à partir de l'un ou l'autre des schémas
- Important: la phase de calcul s'appuie sur les automatismes créés à partir des problèmes travaillés antérieurement

DES PREMIERS FAITS INTÉRESSANTS

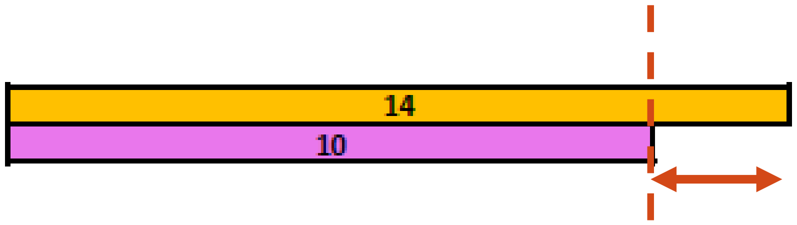
- Idée 1 : considérer une situation avec un gain le matin et une perte l’après-midi avec appui sur un schéma en barres

-Une évidence : un gain et une perte égaux se compensent (réponse d’abord orale)

-Un gain supérieur à la perte induit globalement un gain : sur un exemple simple aisément calculable

-Une perte supérieure au gain induit globalement une perte : sur un exemple aisément calculable

- Idée 2 : On peut s’aider du schéma pour trouver une stratégie de résolution



UN SECOND FAIT INTÉRESSANT

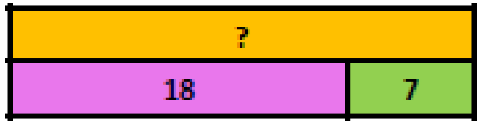
- Une évidence : des billes gagnées s'ajoutent aux billes déjà acquises

Recours à une reformulation particularisant les billes gagnées

∀« **J'ai 18 billes. Je gagne 7 billes. Combien de billes ai-je ?** »

∀Recodage en problèmes de Parties-Tout : **« J'ai 18 billes roses. Je gagne 7 billes vertes. Combien de billes ai-je ?** »

∀Analogie et reconnaissance du modèle additif



- Cela peut favoriser l'identification entre objets gagnés et objet possédés

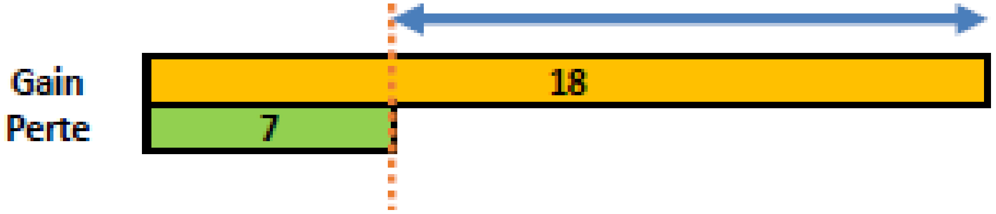
  ∀ Des objets gagnés s'ajoutent aux objets possédés

  ∀ des objets possédés initialement peuvent être des objets gagnés (antérieurement par exemple)

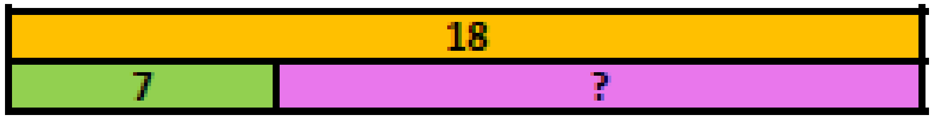
- On représente ensemble les billes possédées et les billes gagnées

PREMIER EXEMPLE

- J’ai gagné 18 billes le matin. J’en perds 7 l’après-midi. Combien de billes ai-je gagnées sur l’ensemble de la journée ?



- Reconnaissance d’un modèle additif : (si besoin à l’aide d’une reformulation)

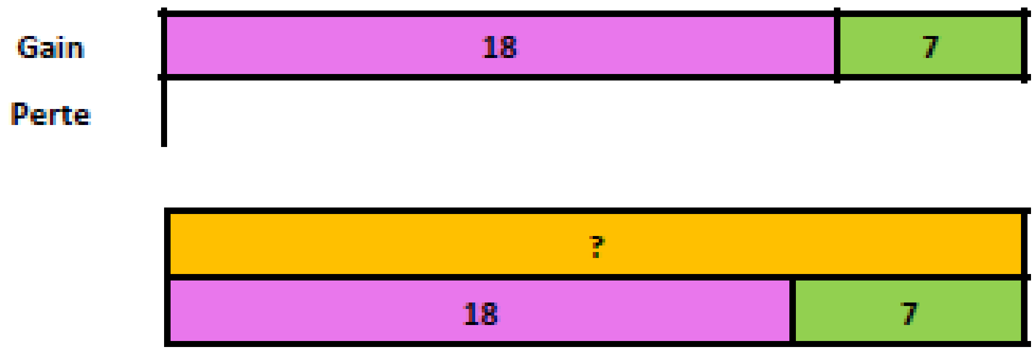


- Travailler d’abord sur des nombres simples

- Une fois le modèle compris, varier les nombres (registre du calcul)

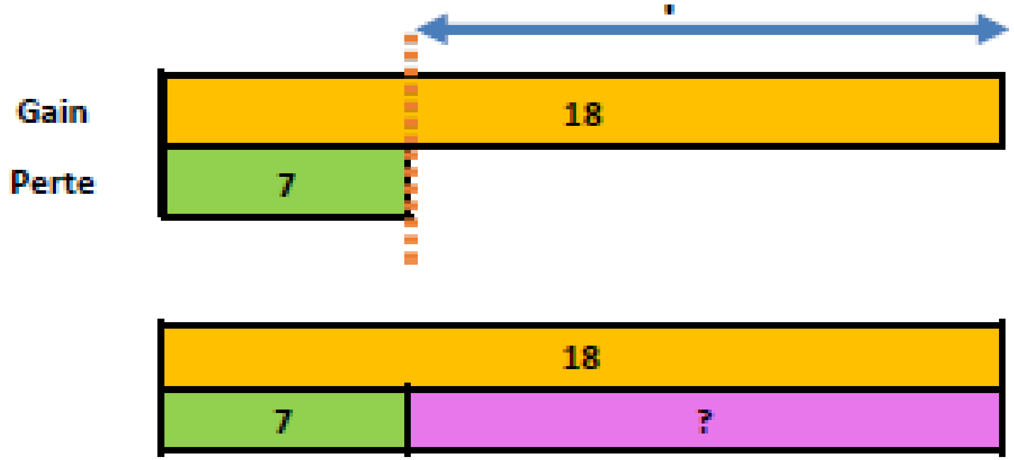
RECHERCHE DE L'ÉTAT FINAL

- Ex1 : J'ai 18 billes. Je gagne 7 billes. Combien de billes ai-je ?



Modèle additif :Recherche d'un tout

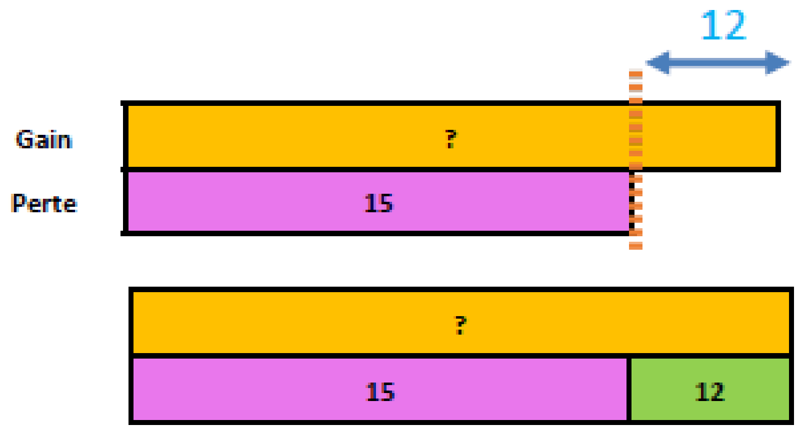
Ex2 : J'ai 18 billes. Je perds 7 billes. Combien de billes ai-je ?



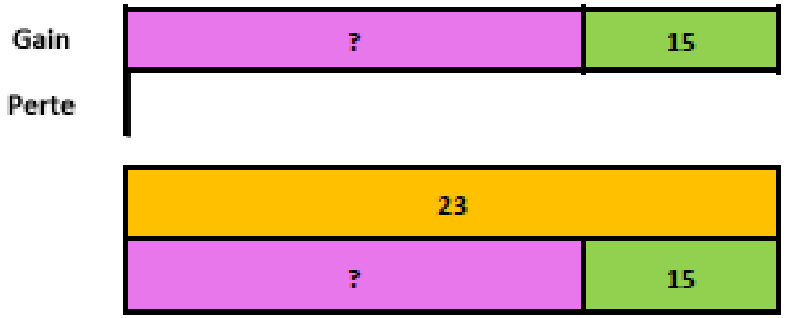
Modèle additif :Recherche d'une partie

RECHERCHE DE L'ÉTAT INITIAL

- Ex1 : J'ai des billes en arrivant à l'école. Le midi, j'en perds 15. Le soir, il me reste 12 billes. Combien avais-je de billes le matin ?



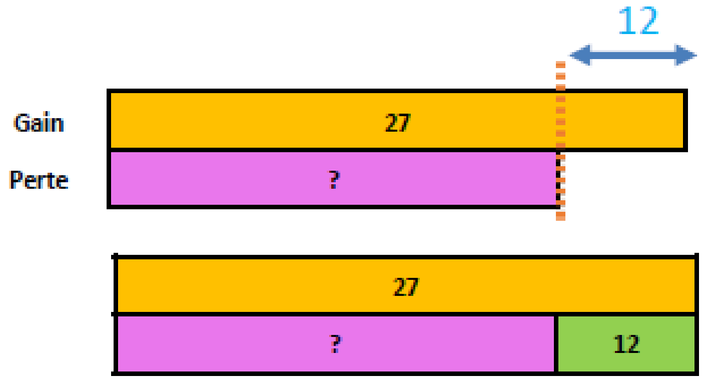
- Ex2 : J'ai des billes en arrivant à l'école. Le midi, j'en gagne 15. Le soir, j'ai 23 billes. Combien avais-je de billes le matin ?



Ex2 : J'ai des billes roses en arrivant à l'école. Le midi, je gagne 15 billes vertes. Le soir, j'ai 23 billes. Combien avais-je de billes le matin ?

RECHERCHE DE LA TRANSFORMATION: PLUS DIFFICILE

- Ex1 : J'ai 27 billes en arrivant à l'école. Le midi, je perds des billes. Le soir, il me reste 12 billes. Combien ai-je perdu de billes le midi ?

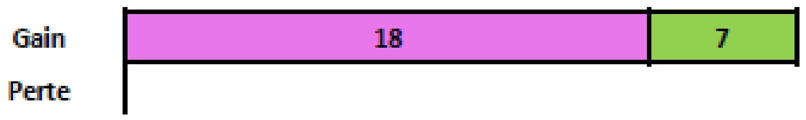


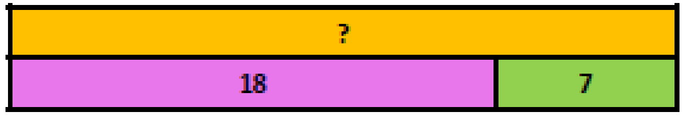
Modèle additif :Recherche d'un tout

- Ex2 : J'ai 27 billes en arrivant à l'école. Le midi, je joue aux billes. Le soir, il me reste 12 billes. Que s'est-il passé le midi ?

COMPOSITION DE TRANSFORMATION

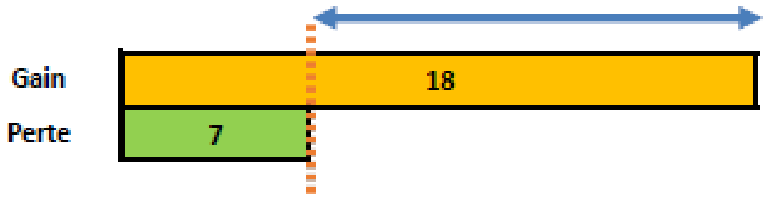
- Ex1 : J'ai gagné 18 billes le matin. Je gagne 7 billes l'après-midi. Combien de billes ai-je gagné en tout ?





Modèle additif :Recherche d'un tout

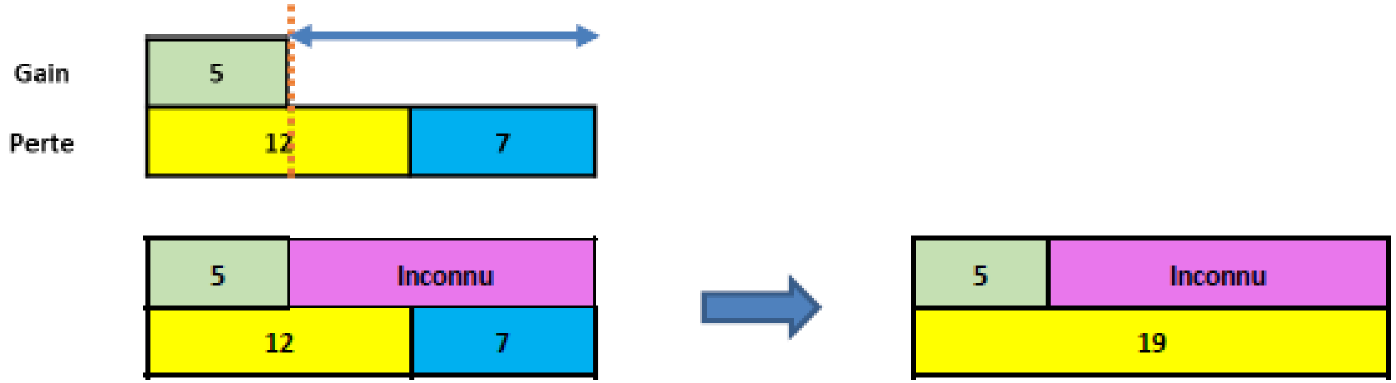
- Ex2 : J'ai gagné 18 billes le matin. Je perds 7 billes le midi. Combien de billes ai-je gagné en tout ?



Modèle additif : Recherche d'une partie

COMPOSITION DE TRANSFORMATION BIS

- Problème complexe avec plusieurs transformations
- Ex : J'ai gagné 5 billes le matin. J'ai perdu 12 billes le midi. Je perds 7 billes l'après-midi. Ai-je gagné des billes ou perdu des billes aujourd'hui ? Combien ?

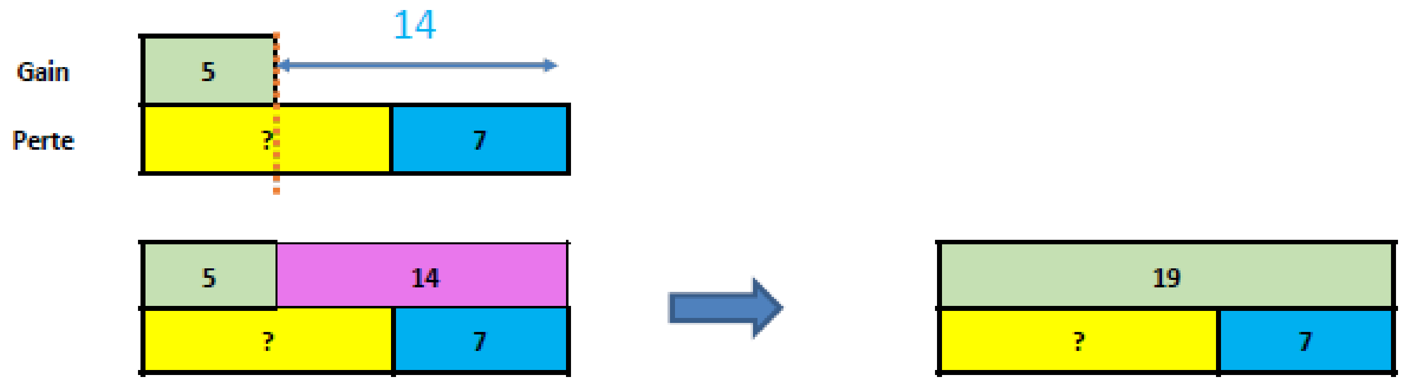


Disparition de la composante temporelle : l'ordre n'importe pas !

COMPOSITION DE TRANSFORMATION TER

- Recherche d'une des composantes

- Ex : J'ai gagné 5 billes le matin. J'ai perdu des billes le midi. Je perds 7 billes l'après-midi. Aujourd'hui, j'ai perdu en tout 14 billes. Combien ai-je perdu de billes le midi ?



ASPECT DIDACTIQUES ET POINT DE VIGILANCE

- Transformation des relations arithmétiques grâce au schéma:
  - uniquement en des relations positives
  - réinvestissement des faits numériques connus et des automatismes
  - préparation au travail des nombres relatifs au collège
- Disparation de la composante temporelle

- Variété des stratégies de calcul : soit par étapes, soit plus globale

- <u>Point de vigilance 1 </u>: faire le lien avec le travail des problèmes Partie/Tout
- <u>Point de vigilance 2 </u>: ne pas proposer trop vite les problèmes sans vérification de l'acquisition et la maitrise des problèmes précédents
- <u>Point de vigilance 3 </u>: vérification des solutions et lien avec les automatismes travaillés antérieurement (registre du calcul)
- <u>Point de vigilance 4 </u>: expliciter les analogies avec les problèmes étudiés (notamment grâce à la reformulation).

PLAN DE FORMATION

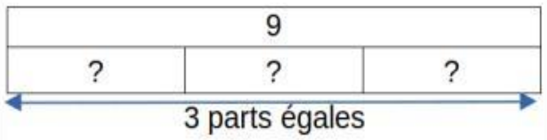
- Enseigner la résolution de problèmes, attendus et compétences mobilisées
- Représenter et modéliser
- Le processus d'abstraction
- La construction du schéma en barres
- Le cas particulier du schéma gain-perte
- Les intérêts du schéma en barres

POURQUOI LE SCHÉMA EN BARRES?

Les schémas en barres :

- Valorisent le travail avec **différents registres de représentation**
- Favorisent un **continuum didactique** du cycle 1 au cycle 4
- Développent les **compétences en modélisation**
- Assurent **un continuum didactique**

TRAITEMENTS INTER-REGISTRES : POURQUOI CHANGER DE REGISTRES DE REPRÉSENTATIONS ?

	Mémorisation	Difficultés	Exemple
Ecrit	Trace écrite qui peut être relue	Ecriture et lecture. Sémantique et syntaxique.	Dans la cour de récréation il y a 9 ballons. 3 enfants se partagent les ballons. Combien de ballons aura chaque enfant ?
Oral	Souvenir de mots considérés comme clés (nombres, plus, moins , tout, partie, part ...)	Expression orale et écoute. Mémorisation.	
Action	Souvenir de certains gestes considérés comme clés	Motricité. Actions implicites ou inconscientes. Manipulation passive. Mémorisation.	
Schéma	Trace écrite des schémas	Modélisation : relations (mathématiques) entre différentes parties du schéma.	

DU REGISTRE ÉCRIT AU REGISTRE ORAL

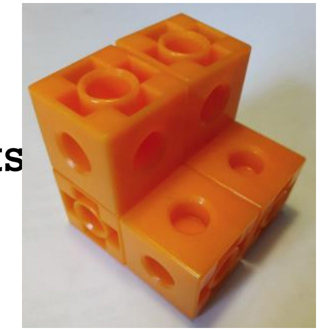
- Pour vérifier la compréhension de l'énoncé
- Distinguer comprendre la question et savoir répondre à la question
- Des élèves ont de grandes difficultés de lecture/<u>Difficulté à lire</u>
- Le passage au registre oral permet de repérer des difficultés de compréhension
- Il y a deux entrées au parc d'attractions. A la première entrée il y a une file d'attente de vingt mètres. A l'autre entrée il y a une file d'attente de dix mètres. Quelle est la longueur totale des files d'attente à l'entrée du parc ? /<u>Difficultés sémantiques</u>
- Reformulation orale pour modifier l'ordre de la question, respecter la chronologie, transformer gain/ perte en parties/tout …

DU REGISTRE ICONIQUE OU ÉNACTIF AU REGISTRE ÉCRIT OU ORAL

- Avec combien de petits cubes est construit le solide ?
- On pose sur la table 4 petits cubes emboitables qu'on assemble pour former une face carrée. Sur une moitié du carré on pose deux autres petits cubes. Combien de petits cubes a le solide construit ?

- On construit un grand cube avec 2 petits cubes d'arête. Puis on enlève 2 petits cubes voisins. Combien de petits cubes a le solide obtenu ?

DU REGISTRE ICONIQUE OU ÉNACTIF AU REGISTRE ÉCRIT OU ORAL



- Difficultés de mémorisation dans le registre oral
  - Combien de petits cubes bleus faut-il pour former le solide ? Jean répond : il faut 7 petits cubes bleus. Es-tu d'accord ? Explique pourquoi ? Explication
- Le registre des schémas permet de mémoriser avec, pour certains élèves et pour certains schémas, moins de difficultés que dans la langue naturelle écrite
- Le registre oral permet de chercher des schémas en barres qui modélisent les relations mathématiques : le schéma « oblige » à le faire par rapport à un dessin moins contraignant
- Le schéma en barres : point d'appui pour passer d'un registre à l'autre au cours des échanges dans la classe

TRAITEMENT INTRA-REGISTRE

- Reformuler à l'écrit (ou à l’oral) pour mieux comprendre

- Manipuler le matériel pour chercher une solution (par exemple distribuer des objets pour réaliser un partage en parts égales) pour les élèves ayant des difficultés de représentations dans certains registres

- Reformuler à l’écrit (ou à l’oral) pour reconnaître des analogies

- Reschématiser un schéma en barre pour reconnaître des schémas de référence ou pour trouver une solution

- Développer un calcul pour trouver le résultat

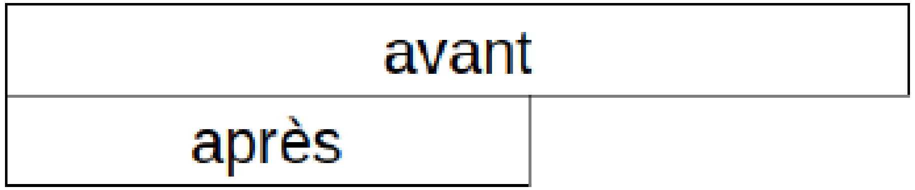
TRAITER DES ÉNONCÉS ÉCRITS (OU ORAUX) POUR TROUVER UNE ANALOGIE (RECODAGE SÉMANTIQUE DE SANDER) AVEC UN MODÈLE

- Paul avait des billes rouges et bleues. Il perd 3 billes rouges pendant la récréation et maintenant il lui reste les 5 billes bleues. Combien de billes avait-il avant la récréation ?

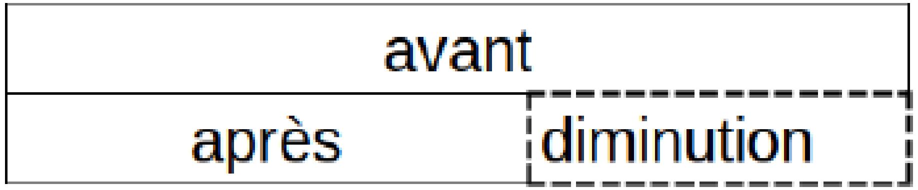
Reformulé en

- La totalité des billes que Paul avait avant la récréation est constituée des 5 billes rouges et des 3 billes bleues. Combien de billes avait-il en tout avant la récréation ?

TRAITER DES SCHÉMAS EN BARRES POUR TROUVER UN MODÈLE RESCHÉMATISATION D'UN PROBLÈME AVANT-APRÈS EN PROBLÈME PARTIES-TOUT



Reschématisation :



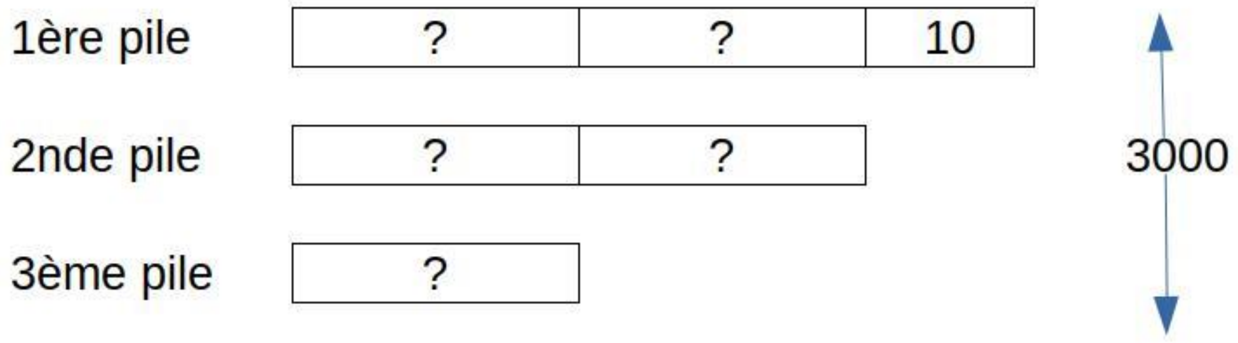
IMPORTANCE DU TRAVAIL SUR LES REGISTRES (INTER-REGISTRES ET INTRA-REGISTRES)

- Pour comprendre le problème
- Pour chercher un modèle
- Pour chercher une solution
- Pour aider en cas de difficultés
- Il est très fréquent et très utile de travailler simultanément dans plusieurs registres (énoncé écrit, justification orale, schéma en barres …)
- Les schémas en barre sont un bon registre de passage entre différents registres

LES SCHÉMAS EN BARRES POUR VALIDER UN MODÈLE

- Validation interne : conformité avec les propriétés mathématiques (parts égales, proportions, règles de calcul …)

- Validation externe : conformité avec la situation du problème



DEUX TYPES DE CONTINUUM DIDACTIQUE

- Existence d'un **continuum didactique « vertical » (CV)** : travail progressif d'une notion ou des stratégies de résolution sur plusieurs années

- Existence d'un **continuum « horizontal » (CH)** : le travail avec les schémas en barre est réinvesti pour d'autres notions (et réciproquement)

- Enjeux qui sont convergents pour le travail et l'explicitation de ces deux types de continuum :

– un gain d'efficacité dans la résolution des problèmes pour les élèves

– un réinvestissement année après année du travail en RDP

– la création d'une réelle culture commune et partagée en RDP (classe, école, circonscription

CONTINUUM VERTICAL ET ENRICHISSEMENT CONTINU DES OBJETS TRAVAILLÉS

- Enrichissement des opérations au long des années :

grâce à la facilité d' « opérer » sur le schéma, on peut facilement « ajouter », « soustraire », « multiplier » ou « diviser » sur le schéma sans recourir à l'écriture symbolique du calcul.

- Continuum entre les modèles additifs et multiplicatifs :
  - la multiplication sur le schéma est visuellement et « oralement » une addition itérée.
  - Le travail sur les problèmes abordés antérieurement peut être réinvesti avec la nouvelle situation
- Progression continue du manipulatoire à l'abstrait, de l'imagé au symbolique

EXEMPLE DE CONTINUUM VERTICAL DANS LES PROBLÈMES LIÉS AU PARTAGE

- Exemple 1 : J'ai 4 sacs de 3 billes, combien ai-je de billes ?

- **Exemple 2** : J'ai 12 billes que je répartis également dans 4 boites. Combien de billes dans chaque boite.

- **Exemple 3** : Je souhaite partager avec mon petit-frère mes 12 billes. J'en garde une partie et j'en donne le triple à mon petit frère. Combien de billes ai-je donné à mon frère?

- Exemple 4 : Je partage mes billes avec mon frère. J'en garde 1/4 et je lui donne le reste. J'ai maintenant 3 billes. Combien en avais-je en tout ?

- **Exemple 5**: Je partage mes 12 billes avec mon frère. J'en garde 1/4 et je lui donne le reste. Combien a-t-il de billes?

12			
3	3	3	3

CONTINUUM VERTICAL ET ENRICHISSEMENT CONTINU DES NOMBRES TRAVAILLÉS DANS LES PROBLÈMES

- Enrichissement progressif des nombres :
  - On "opère" de la même manière sur le schéma quels que soient les nombres en jeu
  - Permanence des modèles additif et multiplicatif
  - Donc modélisation analogue pour des nombres entiers que des fractions ou des décimaux à l'aide du schéma
- Progressivité sur la variable didactique des nombres mobilisés:
  - petits, puis grand puis nouveaux nombres (fractions puis décimaux)

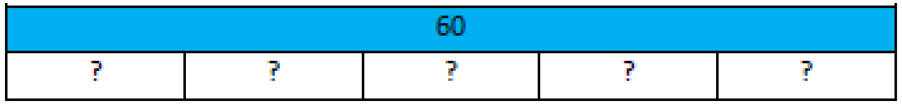
12			
?	?	?	?

56			
?	?	?	?

15			
?	?	?	?

CONTINUUM VERTICAL ET DIFFÉRENCIATION

- Le schéma en barre se concentre en premier lieu sur la structure mathématiques et non sur le type de problème :
  - permet de réinvestir les problèmes et schémas travaillés (retour éventuel à la manipulation)
  - Congruence des schémas pour les différents types de problème
  - Permet de mettre en jeu différentes compétences mathématiques : « dichotomie » des réussites et de l'engagement des élèves
- Le schéma permet d'avoir une approche du calcul progressive :
  Cas d'une modélisation correcte mais difficulté de technicité du calcul
- Il permet une approche progressive de la trace écrite :



contrat didactique à expliciter et à particulariser suivant les besoins et difficultés des élèves

CONTINUUM VERTICAL ET AGRANDISSEMENT CONTINU DU RÉPERTOIRE DE L'ÉLÈVE EN RDP

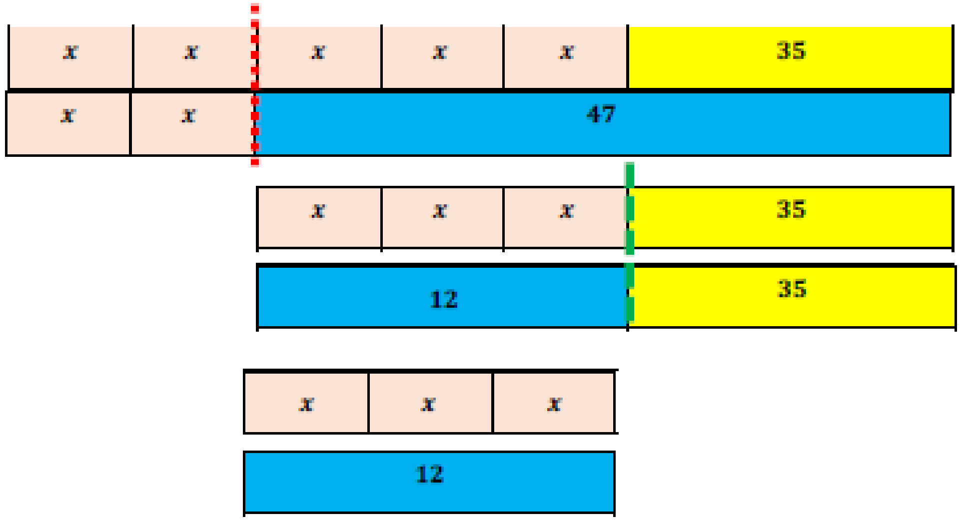
- Faire identifier physiquement des sous-schémas dans des schémas complexes.
- Favoriser les essais de schémas successifs pour arriver à une modélisation correcte ou plus « pratique »
- Faire produire plusieurs schémas : pas obligatoire de tout condenser en un seul schéma

CONTINUUM INTER DEGRÉS CM/4ÈME
APPROCHE DU PRE ALGEBRA

- Léa et Ali ont choisi un nombre.

Léa le multiplie par 5 et ajoute 35. Ali le multiplie par 2 et ajoute 47.

Ils trouvent le même nombre à la fin. À quel nombre avaient-ils pensé ?



$$5x + 35 = 2x + 47$$

$$5x + 35 - 2x = 2x + 47 - 2x$$

$$3x + 35 = 47$$

$$3x + 35 - 35 = 47 - 35$$

$$3x = 47 - 35$$

$$3x = 12$$

$$x = 4$$

CONTINUUM HORIZONTAL : TRAVAIL DE LA PROPORTIONNALITÉ

- **Recette du quatre-quarts pour 8 personnes :**

  250g de sucre/250g de beurre/250g de farine/4 œufs

  Combien faut-il de sucre pour 4 personnes?

  Combien faut-il d'œufs pour 12 personnes?

  Combien faut-il de farine pour 20 personnes?

8 personnes							
125 g	125 g	125 g	125 g	125 g	125 g	2 oeufs	2 oeufs

4 personnes				4 personnes			
125 g	125 g	125 g	2 oeufs	125 g	125 g	125 g	2 oeufs

4 personnes			
125 g	125 g	125 g	2 oeufs

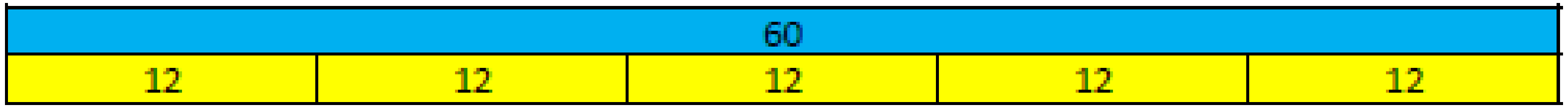
8 personnes				4 personnes			
250g	250 g	250 g	4 oeufs	125 g	125 g	125 g	2 oeufs

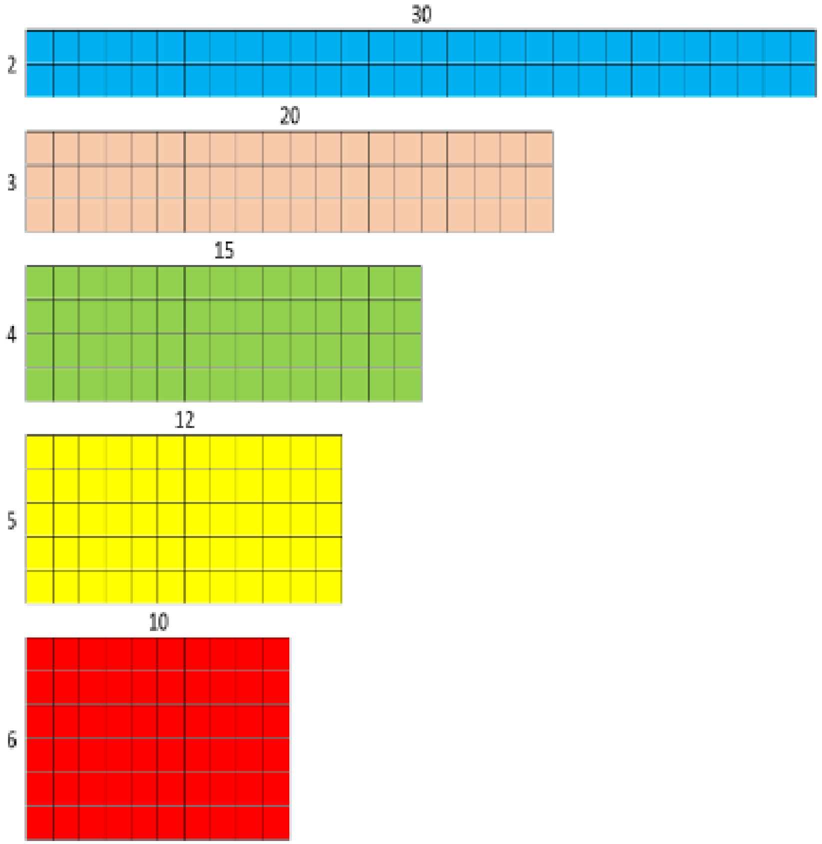
4 personnes				4 personnes				4 personnes			
125 g	125 g	125 g	2 oeufs	125 g	125 g	125 g	2 oeufs	125 g	125 g	125 g	2 oeufs

- Mise en relation des grandeurs et sens de la proportionnalité
- Explicitation des procédures possible et des calculs
- Explicitation des propriétés liées à la proportionnalité
- Favorise la compréhension du tableau de proportionnalité

CONTINUUM HORIZONTAL : LES NOMBRES RECTANGLES - ÉTUDE DE 60

- $60 = 2\times30 = 3\times20 = 4\times15 = 5\times12 = 6\times10$





*Emergence de la décomposition multiplicative.

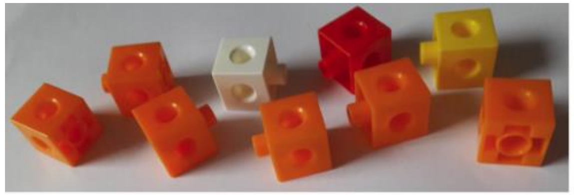
* Vision du nombre en 2 dimension (lien avec aires et les fractions).

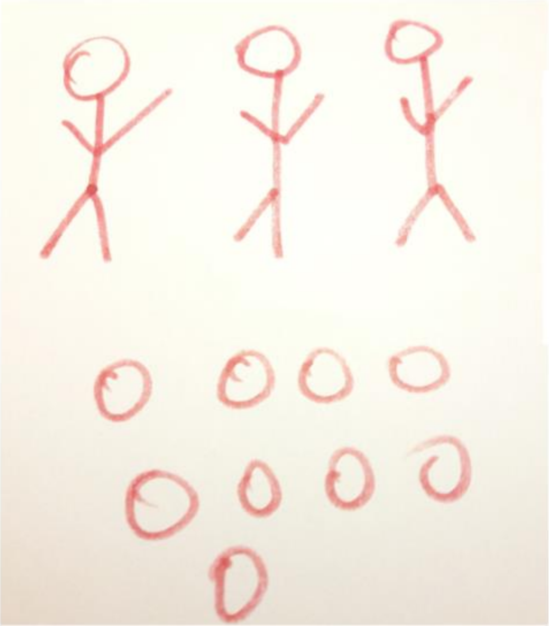
* Emergence de la commutativité de la multiplication :
6 « paquets de » 10 et 10 « paquets de » 6 font 60 objets.

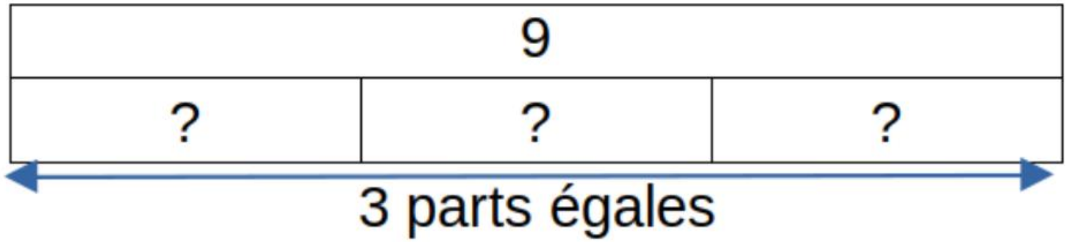
LES SCHÉMAS EN BARRES POUR MODÉLISER

- De représenter à modéliser, de modéliser à calculer
- Pour apprendre à chercher un modèle
- Pour reconnaître les modèles de base
- Pour créer de nouveaux modèles
- Pour valider le modèle

LES SCHÉMAS EN BARRE : DE REPRÉSENTER À MODÉLISER, DE MODÉLISER À CALCULER







$9 = 3 \times ?$
$? = 9 : 3 = 3$

Représenter

Modéliser

Calculer

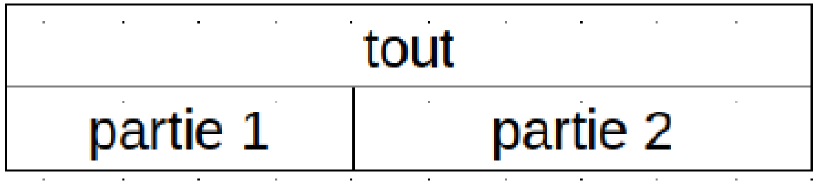
LES SCHÉMAS EN BARRES POUR APPRENDRE À CHERCHER UN MODÈLE

Questions pour chercher :

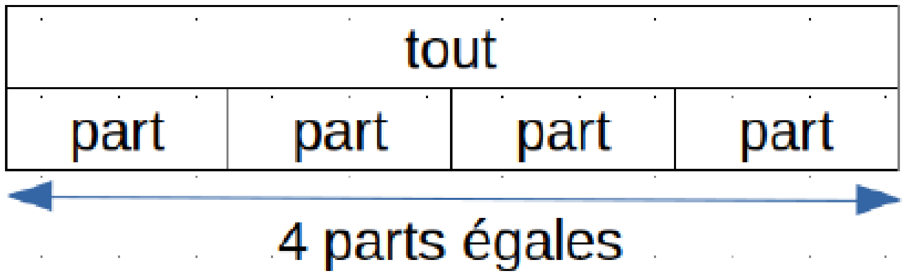
- Quelle quantité est inconnue ?
- Y a-t-il un tout ? Des parties ?
- Peut-on comparer les quantités ? (on peut dire qu'une quantité (le tout) est plus grande qu'une autre même si on ne la connaît pas)
- Y a-t-il des parts égales ? Combien de parts égales ?
- Y a-t-il un partage avec des fractions ou des pourcentages ?
- Y a-t-il plusieurs étapes (de complexité) dans la résolution ?

LES SCHÉMAS EN BARRES POUR RECONNAÎTRE LES MODÈLES DE BASE

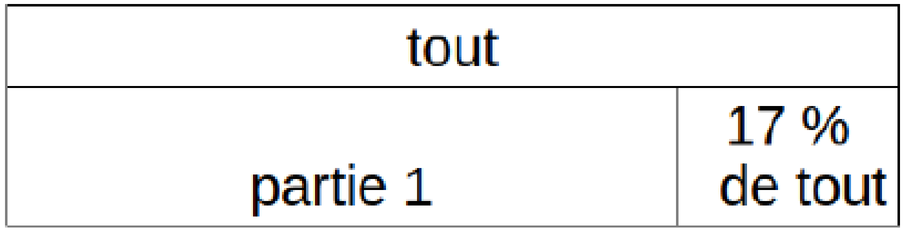
Parties/ tout



Partage égal



Partage avec fraction
ou pourcentage



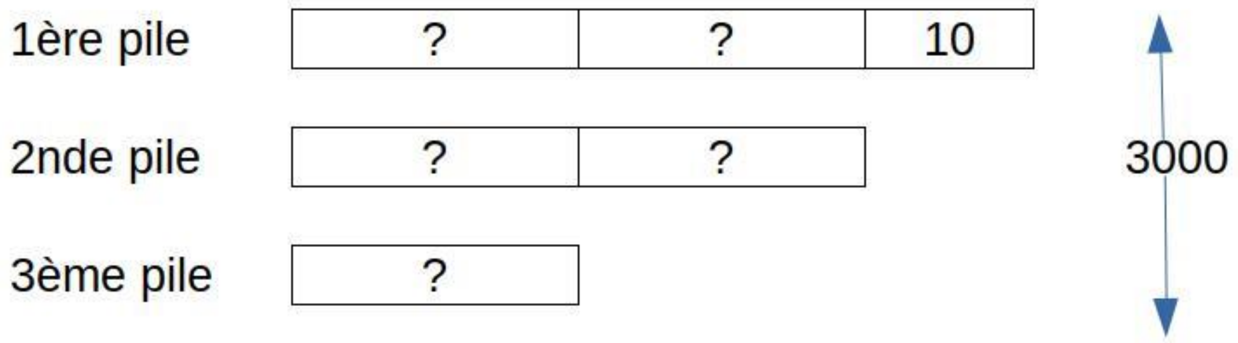
SCHÉMAS EN BARRES POUR DE NOUVEAUX MODÈLES

- **Enoncé :** 3000 livres sont rangés en 3 piles. La première pile contient 10 livres de plus que la deuxième.

Il y a 2 fois plus de livres dans la deuxième pile que dans la troisième. Combien y a - t-il de livres dans la troisième pile ? (problème à plusieurs étapes)

- **Analyse** : Ce problème est complexe car :
- il y a un problème de comparaison absolue entre la première et la seconde piles : « la première pile contient 10 livres de plus que la deuxième »,
- il y a un problème de comparaison relative entre la 2ème pile et la 3ème : « Il y a 2 fois plus de livres dans la deuxième pile que dans la troisième »,
- il y a un problème partie-tout : « 3000 livres sont rangés en 3 piles »

- **Schéma :**



- **Solution :**

Il y a 5 parts égales formées par le nombre de livres de la 3ème pile.
5 x nombre de livres de la 3ème pile + 10 = 3000
5 fois le nombre de livres de la 3ème pile = 3000 – 10 =2990
Nombre de livres de la 3ème pile = 2990:5=598

Source : séminaire DGESCO

CONCLUSION : INTÉRÊT DU MODÈLE EN BARRE

- Visuel : compréhension et discussion

- Analogue avec le matériel de manipulation : lien visuel et symbolique

- Simplification des modèles de bases : sens des opérations
- Problèmes avec fractions et pourcentages accessibles
- Congruent à la structure mathématique voire algébrique : abstraction de la temporalité ou de l'existence physique
- Décomposition des problèmes complexes en étapes : schémas en barres simples
- Continuum didactique jusqu'au collège : fractions, pré-algèbre
- Démarche à étendre aux problèmes atypiques : heuristique, modèle

Les schémas en barres :

- Valorisent le travail avec **différents registres de représentation**
- Favorisent un **continuum didactique** du cycle 1 au cycle 4
- Développent les **compétences en modélisation**

RESSOURCES DISPONIBLES AU CENTRE RESSOURCES DE LA CIRCONSCRIPTION.